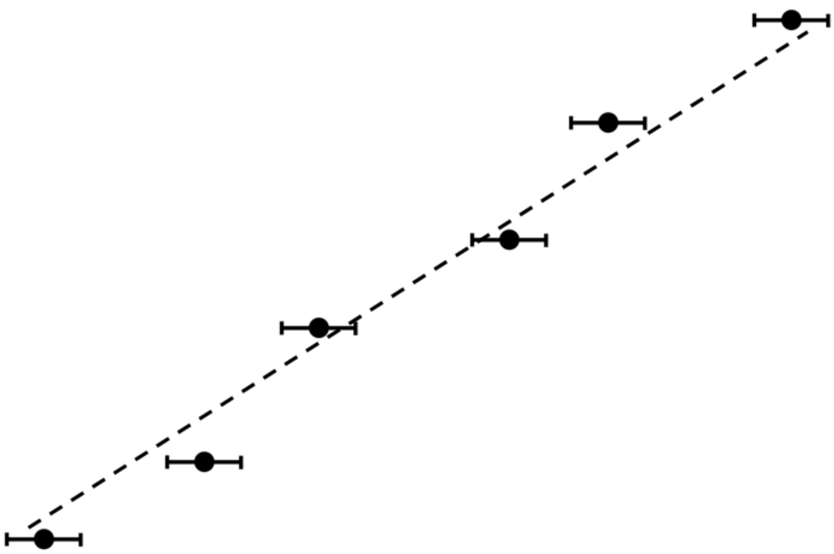
Марко А. Јелић

ПРИРУЧНИК

за израду мисаоних експерименталних задатака на такмичењима из физике



Прво писано издање

Београд, 10. фебруар 2016.

Приручник за израду мисаоних експерименталних задатака на такмичењима из физике

Аутор: **Марко Јелић**,
студент на Електротехничком факултету Универзитета у Београду,
бивши ђак Математичке гимназије

Рецензент: **Александра Димић**,
сарадник у настави на Физичком факултету Универзитета у Београду,
професор физике у Математичкој гимназији

Ментор: **мр Иван Станић**,
професор физике у Математичкој гимназији

Коректура: Аутор

Илустрације: Аутор

Предговор

Приручник за израду мисаоних експерименталних задатака на такмичењима из физике настао је изменама и допунама матурског рада *Анализа и обрада података у мисаоним експерименталним задацима* истог аутора у нади да ће надокнадити недостатак литературе везане за мисаоне експерименте из физике. Сврха приручника је да свим такмичарима и другима заинтересованим за ову област помогне у покушају да тачно и коректно доведу мисаони задатак од почетка до краја, поштујући одговарајућа правила обраде података. Осим тога, познавање материје изложене у приручнику може бити одлична основа за извођење (реалних) експеримената у физичкој лабораторији, посебно када је потребно након експеримента извршити одређене прорачуне или извести неке закључке.

Садржај приручника је највећим делом прилагођен ђацима свих узраста пред којима се на такмичењу може наћи експериментални проблем; дакле, ђацима осмог разреда и надаље. Изузетно, области које захтевају додатно познавање математичких закона (који се уче крајем средње школе тј. гимназије) су означене са звездицом ($*$) после назива.

За сву пружену помоћ, посебну захвалност дугујем професору Ивану Станићу који је у својству ментора значајно утицао на побољшање квалитета изворног матурског рада током његове израде, као и професорки Александри Димић која је више пута прегледала садржај приручника и указала на места где су начињене грешке и места где је потребно изменити и допунити текст. Такође, захваљујем својим колегама такмичарима са Електротехничког факултета Деи Пујић, Душану Попадићу и Марку Маљковићу који су својим сугестијама додатно помогли довођење приручника до његовог крајњег облика.

Све коментаре, сугестије, питања и информације о уоченим грешкама можете упутити на fprirucnik@yahoo.com. Како је ово тек прво издање приручника, могуће је да су неке грешке у тексту остале неисправљене те су Ваша запажања и подршка кључни за сва будућа унапређења приручника.

Београд, марта 2015. Аутор

Садржај

Глава 1
Облици проучавања у физици

Сваки закон, правило, принцип или постулат захтева проверу како би се сматрао валидним. У физици постоје два облика провере: то су посматрање и експериментална потврда.

Посматрање представља планско и систематично опажање које је везано за узроке, почетак, ток и последице природне појаве уз евентуално записивање, цртање, неко основно мерење, постављање претпоставки и извођење закључака. Посматрање се у модерној науци не уважава као довољан метод за проверу неке идеје, али је кроз историју било много заступљеније и признатије у временима када није постојала апаратура за прецизна физичка мерења. Данас, посматрање може бити врло интересантно за сваког младог ученика који се први пут упознаје са физиком као науком. Због његове непоузданости, уместо посматрања се одлучујемо за неки други начин истраживања, као што је експеримент.

Провере научних претпоставки се најчешће, уколико је то могуће, врше експериментално. Експерименталне вежбе, или краће – **експерименти**[1], представљају вештачко изазивање физичких појава у лабораторијским условима које можемо да држимо под контролом. На неком примеру, помоћу инструмената, или простим очитавањем, мере се и проверавају претпостављени односи између физичких величина или особина неке појаве. Ако се у довољном броју експеримената испостави да је дата претпоставка добра, она се проглашава тачном, бар док се не докаже супротно. Како физика није егзактна већ експериментална наука, овим путем никад не можемо засигурно знати да ли је закон који испитујемо потпуно тачан у свим условима, већ само да он важи или не важи у случајевима које испитујемо. О свим осталим случајевима не знамо поуздано, такорећи, ништа.

Због тога су се кроз историју физике многе наводно доказане теорије показале неадекватним у каснијим истраживањима у неким екстремним (или само другачијим) условима. Људи су вековима веровали да закони класичне механике важе увек, и тек је појавом Ајнштајнове *Теорије релативитета* закључено да су они примењиви само на тела која се крећу брзином много мањом од брзине светлости. Али, с обзиром на то да се свакодневно углавном бавимо механичким појавама на Земљи, таква сложена физика нам најчешће није потребна, и Њутнови закони су за наше потребе сасвим довољно прецизни.

[1] Реч експеримент потиче од латинске речи *experimentum* изведене од глагола *experiri* што у преводу значи покушати, пробати.

У свакодневном изражавању се најчешће под експериментом подразумева само прикупљање података и њихова обрада, али експеримент значи много више од тога. Сваки експеримент се састоји од следећих фаза:

1. планирање,
2. прикупљање или израда апаратуре,
3. калибрација (подешавање) мерних уређаја,
4. мерење,
5. обрада резултата мерења и
6. документација.

Како би се обрада резултата мерења што боље увежбала, у наставу физике се уводи, такозвани, *мисаони експеримент* – задатак у коме су унапред задате измерене вредност добијене проласком кроз кораке 1, 2, 3 и 4, уз одговарајуће додатне податке као што су опис експеримента и евентуалне грешке при мерењу. Циљ оваквог задатка јесте да ученик који га ради, користећи одговарајући поступак, обрадом резултата мерења израчуна неку непознату вредност или изведе одговарајући закључак на исти начин као што би урадио физичар који је у лабораторији извршио цео експериментални поступак, с тим што ученик прескаче кораке који се тичу планирања експеримента и самог мерења.

Велики значај оваквом типу задатака придодаје то што се у последњих 15 до 20 година, по правилу, на државним такмичењима из физике у Србији даје по један мисаони експеримент за сваки разред почевши од осмог. Како би се овакав задатак правилно урадио, потребно је бити бар теоретски упознат са свим кључним појмовима везаним за физичке експерименте.

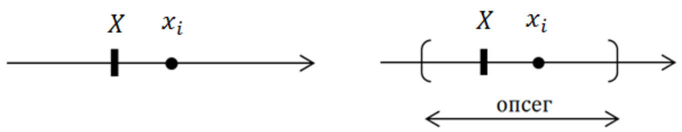
Експерименти су такође важни зато што се често за неку дисциплину каже да је наука тек када се теорије те науке могу доказати експериментално. Изузетак се прави код математике као једине егзактне науке у којој се докази врше на основу претпоставки и договорених основа свих тврђења (аксиома).

Глава 2
Појмови везани за физичке експерименте

Грубо речено, најједноставнији физички експерименти подразумевају само једно мерење неке бројне вредности физичке величине: дужине, површине, запремине, брзине, убрзања и др. Размотримо сада зашто овакав поступак није довољно прецизан.

Ниједно мерење не може да буде потпуно тачно због извесних несавршености инструмената и људских грешака. Због непрецизности, грешака у поступку[1], случајних и намерних грешака, уводимо такозване грешке мерења[2] за сваку физичку величину коју меримо, да бисмо прецизније одредили резултат мерења.

При сваком покушају одређивања неке величине, било директним мерењем (непосредно) или индиректно, помоћу формула (посредно), правимо одређену грешку, те једним мерењем и записивањем резултата нећемо добити поуздану информацију колико тачно износи величина коју меримо. Зато, уместо да за резултат мерења наведемо **један број**, бирамо да као резултат понудимо **скуп вредности** у коме се величина коју меримо сигурно налази. Тај скуп, који се назива и **опсег**, биће одређен најмањим и највећим чланом.



(а) (б)

Слика 2.1: Приказивање резултата мерења на бројевној правој

Рецимо да меримо неку физичку величину чија је тачна вредност X, и да се, на пример, ради о дужини. Рецимо, такође, да смо метром измерили дужину x_i[3]. На слици 2.1 (а) приказан је пример односа тачне величине X и измерене x_i, а на слици (б) један могући начин на који

[1] Грешке у поступку често се у литератури називају и систематске грешке.

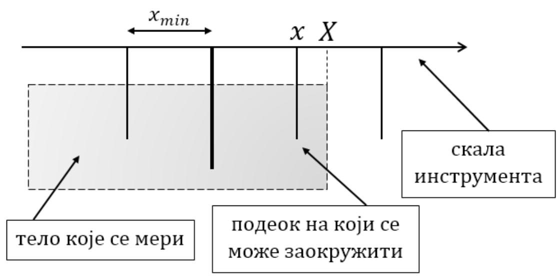
[2] Неопходно је разлоковати *грешке у поступку* и *грешке мерења*. Иако ова два појма звуче слично, први означава све оно што може да се уради погрешно при изведби неког експеримента, а други означава број који се придружује резултату мерења како би мерење било тачно чак и када се у обзир узму поменуте грешке у поступку.

[3] Разлог зашто се вредности X и x_i разликују можете наћи у следећем одељку.

можемо узети опсег вредности тако да му X припада. Наравно, овај услов испуњава и бесконачно других опсега, али се треба трудити да онај изабрани буде што мањи како би мерење било прецизније, али исто тако треба да буде довољно велики да му вредност X припадне.

2.1 Тачност инструмента

Сваки лењир или мерило које можемо да употребимо за одређивање дужине или било које друге величине је несавршено у смислу да је за то мерило одређена најмања вредност која се може измерити њиме. Та вредност је дефинисана величином једног подеока (размака између две цртице или вредношћу најмање цифре на дигиталном екрану) на мерном инструменту. За стандардне школске лењире дужина најмањег подеока је углавном једнака 1mm. У случају да се мерење врши таквим лењиром, објекти чије су стварне димензије, рецимо, $X_1 = 0,5$mm, $X_2 = 37,37$mm или $X_3 = 722,45$mm не можемо прецизно измерити. Ако бисмо мерили редом дужине X_1, X_2 и X_3 школским лењиром, добили бисмо вредности $x_1 \approx 1$mm, $x_2 \approx 37$mm и $x_3 \approx 722$mm. При мерењу се држимо принципа да у случају да вредност коју меримо падне између две цртице на лењиру, њу одокативно можемо заокружити на већу или мању у зависности од тога да ли нам се чини да прелази средиште дужине између подеока. Пример једног таквог мерења дат је на слици 2.2.



Слика 2.2: Пример заокруживања при мерењу

Није исправно бележити измерене вредност са децималним местима која су мања од најмање вредности коју показује скала апарата који користимо. Дакле, никада за измерену вредност школским лењиром не бисмо записали $x = 20,2$mm јер се дужина од $0,2$mm овим путем не може измерити због тога што је мања од $1mm$, макар и ако од ока можемо да проценимо да дужина коју меримо прелази вредност од 20cm за једну петину подеока. Наравно, увек можемо узети неки прецизнији инструмент (као што су, на пример, помично кљунасто мерило са нонијусом (шублер) или микрометарски завртањ), али и за тај инструмент ће постојати нека мала вредност коју он не може да измери. Што је та вредност мања, грешка при мерењу је такође мања, а прецизност мерења већа.

Тачност мерног инструмента[4] описује се најмањом вредношћу која се може измерити датим мерним инструментом и најчешће се означава

[4]У литератури и слободном говору често се уместо термина *тачност инструмента* може чути *прецизност инструмента*.

великим словом C са индексом који говори о томе о којој величини се ради. У случају мерења школским лењиром, најмања мерљива вредност је $x_{min} = 1\text{mm}$, па је тачност лењира $C_x = 1\text{mm}$.

У случају да користимо модерније инструменте, може се десити да измерене вредности очитавамо са неког екрана (као на дигиталној штоперици тј. хронометру). Тада се не може рећи да је тачност инструмента растојање између два подеока јер подеока нема, већ се ради само о бројевима. У том случају, за тачност узимамо вредност последњег децималног места које апарат може да покаже. Дакле, ако, на пример, користимо штоперицу као са слике 2.3 која може да измери најмање време од $0,001\text{s}$, онда за тачност инструмента узимамо баш ту вредност.

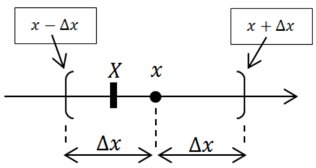
Слика 2.3: Штоперица

2.2 Апсолутна грешка

Генерално, знамо да се при сваком мерењу, било директним очитавањем са мерног инструмента, или након вршења различитих математичких операција над већ познатим измереним величинама, прави нека нумеричка грешка. Ова грешка представља највећу могућу разлику између вредности коју добијамо као резултат мерења и оне вредности коју је требало да измеримо. Такве грешке називамо **апсолутним грешкама**, и оне ће нам служити за формирање опсега у ком би требало да се налази тражена величина. Апсолутне грешке се означавају великим грчким словом делта испред величине, односно као Δx у нашем примеру мерења дужине x. Дакле, ако се за измерену вредност x добија апсолутна грешка Δx, резултат мерења има облик опсега од $x - \Delta x$ до $x + \Delta x$ такав да важи

$$X \in (x \pm \Delta x), \text{ или другачије записано: } X \in (x - \Delta x, x + \Delta x).$$

На овај начин смо формирали скуп могућих решења између бројева $x - \Delta x$ и $x + \Delta x$ на бројевној правој, као на слици 2.4.



Слика 2.4: Интервал вредности са апсолутном грешком

Уколико је мерење директно, као рецимо очитавање са школског лењира, апсолутна грешка је једнака тачности инструмента или половини те вредности, па би било $\Delta x = C_x = 1\text{mm}$ или $\Delta x = C_x/2 = 0,5\text{mm}$. Раније је речено да у случају да величина коју меримо падне између два подеока, њу можемо заокружити одокативно на већу или мању вредност. Уколико је ово одокативно заокруживање тачно, јасно је да је максимална разлика између вредности коју смо измерили и оне коју је требало да добијемо једнака половини подеока на скали инструмента. Овим је оправдано коришћење грешке $\Delta x = C_x/2$ тј. $\Delta x = 0,5$mm за школски лењир. У случају да особа која врши мерење не жели да води рачуна о томе да ли се измерена вредност заокружује на већи или мањи подеок, максимална разлика између вредности коју добија и оне коју је требало да измери износиће цео подеок на скали инструмента. Овим је оправдано коришћење $\Delta x = C_x$ тј. $\Delta x = 1$mm за школски лењир. При изради експерименталних задатака прихватају се коришћења обе вредности, с тим што се друга чешће може наћи у решењима задатака на такмичењима, а при том је једноставнија за употребу. Дакле, тачност мерног инструмента, у општем случају, представља најосновнији облик апсолутне грешке.

Код дигиталних инструмената понекад се деси да њихов произвођач прецизира формулу по којој се грешка инструмента рачуна на основу тачности. То је случај са инструментима који прво мере одређене физичке величине, а потом користе одређене математичке изразе за прерачунавање да би на крају на екрану приказали одређену изведену вредност. Наравно, у таквим случајевима треба се придржавати формуле коју је произвођач приложио за рачунање грешке.

Пример. У ранијем тексту смо за пример узели мерење тачне дужине $X_2 = 37,37$mm. Нашим лењиром бисмо добили измерену вредност $x_2 = 37$mm и апсолутну грешку $\Delta x_2 = 1$mm па би опсег решења био $x_2 = (37 \pm 1)$mm. Приметимо да важи да X_2 припада датом скупу јер су испуњени услови $X_2 > (37-1)$mm и $X_2 < (37+1)$mm. Дакле, наше мерење је тачно. Као што се може приметити, уобичајено је да се јединице физичких величина пишу иза заграда код одређеног опсега решења ради скраћивања записа. Такође, треба водити рачуна да крајње десно (најмање) децимално место измерене вредности x не буде мање од апсолутне грешке Δx при том мерењу. Дакле, запис $x = (37,37 \pm 1)$mm би био некоректан јер се датим инструментом не може измерити дужина $0,37$mm због тога што је она мања од тачности $C = \Delta x$ тј. 1mm. ▲

При изради експеримената у физици заступљена су два типа мерења: директно и индиректно. **Директно (непосредно) мерење** подразумева очитавање измерене вредности са неког уређаја, а **индиректно (посредно) мерење** подразумева мерење тј. израчунавање при коме се од директно измерених величина, помоћу математичких формула и израза, добијају друге, нове, вредности. Поступак за одређивање апсолутне грешке при директном мерењу је описан у овом одељку, док је за потребе израчунавања апсолутне грешке индиректног мерења неопходно увести неке нове појмове, као и правила извођења. Ова правила биће обрађена у наредном одељку.

2.3 Релативна грешка

Да бисмо даље одредили прецизност неког мерења уводимо нову величину, релативну грешку, која показује колико пута је апсолутна грешка мерења Δx мања од измерене вредности код x. По тој дефиницији, знајући да се **релативна грешка** означава малим грчким словом делта (δ)[5] испред измерене величине, било би[6]

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}.$$

Овако дефинисана релативна грешка би за решења давала реалне бројеве из интервала од 0 до 1 јер апсолутна грешка не би требало никад да буде ни негативна, а ни већа од измерене вредности. Изузетно, могло би да се деси да релативна грешка премаши 1 када је мерење јако непрецизно. Зато се релативне грешке често записују у облику процената од 0 до 100%, односно

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot (100\%).$$

На основу вредности релативне грешке може се одредити колико је мерење прецизно по следећој договореној подели, приказаној у табели 2.1:

$0 \leq \delta x \leq 5\%$	:	мерење је прецизно
$5\% < \delta x \leq 10\%$	:	мерење је сразмерно непрецизно, али прихватљиво
$10\% < \delta x$	:	мерење је непрецизно и треба га поновити

Табела 2.1: Прецизности мерења према вредности релативне грешке

2.4 Извођење израза за грешку индиректно мерених величина*

Осим директног мерења очитавањем са инструмента, у експерименталној пракси се користи и такозвано индиректно мерење. **Индиректно (посредно) мерење** представља поступак израчунавања неке тражене вреднсти на основу више других познатих, користећи унапред утврђену формулу или формуле. Као што је већ речено, сваку вредност мора пратити и њена грешка, те није тешко закључити да ће правило за извођење апсолутне грешке при индиректном мерењу играти врло значајну улогу у свим експериментима.

Посматрајмо функцију f као функцију n **међусобно независних променљивих**[7]: $x_1, x_2, ..., x_n$, чију грешку желимо да израчунамо. Другачије записано, било би

$$f = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

[5] У литератури се за релативну грешку величине x равноправно користе ознаке δ_x и δx.

[6] У литератури се често изостављају заграде апсолутне вредности x. У случају да се користе такве формуле, понекад може бити неопходно вештачки променити знак релативне грешке јер она никад не би требало да буде негативна.

[7] *Међусобно независне* променљиве називају се и *(потпуно) некорелисане* променљиве.

Из нумеричке анализе познато је да се апсолутна грешка Δf функције више променљивих f може одредити користећи формулу[8]

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i.$$

где су x_i појединачне променљиве, а Δx_i њихова (улазна) апсолутна грешка. Наведена формула еквивалентна је изразу

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n.$$

Знајући ову формулу, могуће је извести израз за грешку произвољне сложене функције. Испитајмо сада неколико честих примера.

Пример 1. Нека се y добија сабирањем две величине, односно

$$y = x_1 + x_2.$$

Тада за апсолутну грешку за y важи да се она рачуна по формули

$$\Delta y = |1| \cdot \Delta x_1 + |1| \cdot \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Нека се y сада добија одузимањем две величине, односно

$$y = x_1 - x_2.$$

Слично као и у претходном случају, за апсолутну грешку за y добија се

$$\Delta y = |1| \cdot \Delta x_1 + |-1| \cdot \Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2. \quad \blacktriangle$$

Пример 3. Из претходна два примера може се закључити да, због апсолутне вредности у општој формули за грешку функције, знак појединачних променљивих не утиче на израз за грешку функције. Дакле, апсолутна грешка за вредност y облика

$$y = \pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \cdots \pm x_n$$

рачунала би се по формули

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots + \Delta x_n. \quad \blacktriangle$$

Пример 4. У случају да се y добија множењем две величине, важи да је

$$y = x_1 \cdot x_2.$$

[8] Оператор тј. израз $\partial f / \partial x_i$ представља *парцијални извод* функције f по променљивој x_i. Он се добија тако што се израчуна први извод функције f, при чему се x_i посматра као једина променљива, а сви остали фактори као константе.

Применом формуле за грешку функције добија се:

$$\begin{aligned}\Delta y &= |x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2 \qquad\qquad / \cdot \frac{|x_1x_2|}{|x_1x_2|}\\ &= |x_1x_2| \cdot \left(\frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|}\right)\\ &= |y| \cdot \left(\frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|}\right).\end{aligned}$$

Трансформацијом претходног израза добија се еквивалентна формула која се најчешће користи у литератури[9]:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad \iff \quad \delta y = \delta x_1 + \delta x_2. \quad \blacktriangle$$

Пример 5. Из последњег примера може се закључити да у општијем случају, када се y налази као производ више од две променљиве, имамо:

$$y = \prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \quad \Longrightarrow \quad \delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i = \delta x_1 + \delta x_2 + \cdots + \delta x_n.$$

Специјалан случај оваквог множења је када се y добија степеновањем природним бројем. Тада важи:

$$y = \prod_{i=1}^{n} x = x^n \quad \Longrightarrow \quad \delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x = n\delta x.$$

Приметимо да се последња формула може искористити и када се y добија кореновањем или степеновањем неким бројем који није природан. Тада би израз за y, на пример, имао облик

$$y = \sqrt[a]{x^b}.$$

Знајући правила степеновања, исти тај израз можемо да запишемо у следећем облику, и да по претходном правилу изведемо грешку:

$$y = (x)^{b/a} \quad \Longrightarrow \quad \delta y = \left|\frac{b}{a}\right| \cdot \delta x \quad \iff \quad \frac{\Delta y}{y} = \left|\frac{b}{a}\right| \cdot \frac{\Delta x}{|x|}. \quad \blacktriangle$$

Пример 6. Нека се y добија дељењем две величине, односно

$$y = \frac{x_1}{x_2} = x_1 x_2^{-1}.$$

[9] У форумлама за грешку посредно мерене величине се у литератури често изостављају заграде апсолутних вредности. У случају да се користе такве формуле, понекад може бити неопходно вештачки променити знак апсолутне или релативне грешке због тога што ни једна ни друга никада не би требало да буде негативна.

На сличан начин као у претходним примерима, на основу формуле за грешку функције, добија се:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left|\frac{1}{x_2}\right|\Delta x_1 + \left|-\frac{x_1}{{x_2}^2}\right|\Delta x_2\\ &= \left|\frac{x_1}{x_2}\right|\frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \left|\frac{x_1}{x_2}\right|\frac{\Delta x_2}{|x_2|}\\ &= |y|\left(\frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|}\right).\end{aligned}$$

Трансформацијом последњег израза добија се следећа форумула

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} \quad\Longleftrightarrow\quad \delta y = \delta x_1 + \delta x_2.$$

Може се приметити да је ово исти израз као онај за грешку производа две величине из примера 4. ▲

Пример 7. Апсолутна грешка може се одредити и када се величина y добија коришћењем неких елементарних функција као што су sin, cos, ln и exp. Размотримо неколико таквих примера:

Ако је $y = \exp x = e^x$, биће

$$\Delta y = e^x \cdot \Delta x = y \cdot \Delta x \quad\Longleftrightarrow\quad \delta y = \Delta x. \quad ▲$$

Ако је $y = \ln x$, биће

$$\Delta y = \left|\frac{1}{x}\right|\Delta x. \quad\Longleftrightarrow\quad \Delta y = \delta x. \quad ▲$$

Ако је $y = \sin x$, биће

$$\Delta y = |\cos x|\Delta x. \quad ▲$$

Ако је $y = \cos x$, биће

$$\Delta y = |-\sin x|\Delta x = |\sin x|\Delta x. \quad ▲$$

2.5 Таблица израза за грешку индиректно мерених величина

На основу наведених формула и обрађених примера у претходном одељку, могуће је формирати таблицу израза, односно, формула на основу којих се израчунавају апсолутне и релативне грешке при индиректним мерењима. При изради задатака на такмичењима најчешће није неопходно изводити ове изразе већ је довољно познавати горње две таблице са следеће слике 2.5:

функција y	израз за грешку
$x_1 + x_2$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$
$x_1 - x_2$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$
$x_1 \cdot x_2$	$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$
x_1 / x_2	$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$

функција y	израз за грешку
$ax \quad (a \in \mathbb{R})$	$\Delta y = \lvert a \rvert \Delta x$
$\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$	$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\delta y = \lvert a \rvert \delta x$
$x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$	$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2 + \cdots + \delta x_n$

функција y	израз за грешку
$\sin x$	$\Delta y = \lvert \cos x \rvert \Delta x$
$\cos x$	$\Delta y = \lvert \sin x \rvert \Delta x$
$\operatorname{tg} x$	$\Delta y = \Delta x / \cos^2 x$
$\operatorname{ctg} x$	$\Delta y = \Delta x / \sin^2 x$

функција y	израз за грешку
$\arcsin x$	$\Delta y = \Delta x / \sqrt{1 - x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$\Delta y = \Delta x / (1 + x^2)$
$\exp x$	$\Delta y = y \Delta x$
$\ln x$	$\Delta y = \Delta x / \lvert x \rvert$

Слика 2.5: Таблица елементарних израза за грешку индиректно мерених величина

2.6 Заокруживање бројних вредности

При изради експерименталних задатака, често је неопходно заокружити бројне вредности разних величина ради једноставнијег приказа. Иако је заокруживање наизглед прилично једноставан процес, важно је придржавати се одређених правила.

2.6.1 Заокруживање физичких величина

При заокруживању бројних вредности физичких величина као што су дужина, запремина, маса, брзина, убрзање и др. користи се, такозвано, **правило парне цифре** које гласи:

Ако посматрамо број X чије су цифре a_1, a_2, a_3, ..., a_k, и чији је облик задат са

$$X = a_1 \cdot 10^n + \cdots + a_m \cdot 10^{n-m+1} + \underbrace{a_{m+1} \cdot 10^{n-m} + \cdots + a_k \cdot 10^{n-k+1}}_{R_m(X)}$$

који желимо да заокружимо одсецањем дела означеног као $R_m(X)$, број x који се добија на овај начин има облик

1. $x = a_1 \cdot 10^n + \cdots + a_m \cdot 10^{n-m+1}$ када је $R_m(X) < 10^{n-m+1}/2$
2. $x = a_1 \cdot 10^n + \cdots + (a_m + 1) \cdot 10^{n-m+1}$ када је $R_m(X) > 10^{n-m+1}/2$
3. $x = a_1 \cdot 10^n + \cdots + a_m \cdot 10^{n-m+1}$ када је $R_m(X) = 10^{n-m+1}/2$ и $2 | a_m$
4. $x = a_1 \cdot 10^n + \cdots + (a_m + 1) \cdot 10^{n-m+1}$ када је $R_m(X) = 10^{n-m+1}/2$ и $2 \nmid a_m$

Изузетно, када је $a_m = 9$, а треба га повећати, a_m постаје 0 , а a_{m-1} се повећава за један.

Другим речима, по овом правилу важи: Ако је одсечени део броја различит од половине најмање децимале преосталог дела, примењују се „стандардна” правила заокруживања тако што се последња неодсечена цифра или повећава за један или остаје непромењена, а ако је одсечени део тачно једнак половини најмање децимале преосталог дела, и ако је последња преостала цифра парна, она се не мења, а ако је непарна, повећава се за један. На овај начин „фаворизују” се парне цифре као последње у заокруженом броју па отуда и назив правило *парне* цифре. Размотримо неколико примера овог заокруживања:

Пример 1. Заокружити број $X = \mathbf{52,1}321$ на једно децимално место.
Решење 1. Као што се види, део за одсецање има вредност $0,0321$ што је мање од $0,0500$ колико износи половина вредности последњег децималног места у делу који преостаје. Дакле, примењује се израз под 1. за x, те је $x = 52,1$. ▲

Пример 2. Заокружити број $X = \mathbf{127,45}684$ на два децимална места.
Решење 2. Као што се види, део за одсецање има вредност $0,00684$ што је веће од $0,00500$ колико износи половина вредности последњег децималног места у делу који преостаје. Дакле, примењује се израз под 2. за x, те је $x = 127,46$. ▲

Пример 3. Заокружити број $X = \mathbf{843,24}5$ на два децимална места.
Решење 3. Као што се види, део за одсецање има вредност $0,005$ што је тачно једнако износу половине вредности последњег децималног места у делу који преостаје, и при том је последња цифра која се не одсеца парна и једнака 4. Дакле, примењује се израз под 3. за x, те је $x = 843,24$. ▲

Пример 4. Заокружити број $X = \mathbf{15,9}5$ на једно децимално место.
Решење 4. Као што се види, део за одсецање има вредност $0,05$ што је тачно једнако износу половине вредности последњег децималног места у делу који преостаје, и при том је последња цифра која се не одсеца непарна и једнака 9. Дакле, примењује се израз под 4. за x, уз изузетак $a_m = 9$, те је $x = 16,0$. ▲

2.6.2 Мајорирање апсолутних грешака

Као што је већ познато, апсолутне грешке служе да одреде колико се тачна вредност неке величине разликује од измерене вредности. Уколико би се за неко готово мерење смањила апсолутна грешка из било ког разлога, то мерење више не би било прецизно. Из овог једноставног разматрања следи правило по коме се апсолутна грешка увек заокружује на већи број, никако на мањи. Додатно, вредност за апсолутну грешку се повећава све док се не добије број који у свом запису има само једну ненулту цифру[10] (не рачунајући експонент ако се појављује). Овај поступак се због природе поступка који је потребно извршити правилно назива **мајорирање**, а не *заокруживање*, и под тим именом ће бити коришћен у даљем тексту.

Изузетно, ако је прва ненулта цифра (читајући са лева на десно) у апсолутној грешци једнака 1, вредност грешке се *не мора* мајорирати тј. повећавати по описаном поступку, већ је могуће оставити грешку у запису који има две ненулте цифре. Овакав поступак при заокруживању

[10] Разлог због ког се апсолутне грешке заокружују на овај начин заснива се на принципу сигурних цифара и биће изостављен у овом приручнику.

је карактеристичан за астрономију док се у физичким експериментима најчешће мајорирају све апсолутне грешке.

Дакле, колика год да је вредност за апсолутну грешку, њена мајорирана вредност биће први број већи од дате вредности који у свом запису има само једну ненулту цифру. Размотримо неколико примера овог заокруживања:

Пример 1. Мајорирати апсолутну грешку $\Delta X = \mathbf{5}2,1321$.
Решење 1. Јасно је да је први број који у свом запису има једну ненулту цифру, а већи је од $52,1321$, број $\Delta x = 60$. ▲

Пример 2. Мајорирати апсолутну грешку $\Delta X = 0,0\mathbf{7}93$.
Решење 2. Јасно је да је први број који у свом запису има једну ненулту цифру, а већи је од $0,0793$, број $\Delta x = 0,08$ ▲

Пример 3. Мајорирати апсолутну грешку $\Delta X = 0,0\mathbf{1}2$.
Решење 3. Јасно је да је први број који у свом запису има једну ненулту цифру, а већи је од $0,012$, број $\Delta x = 0,02$. Али, прва ненулта цифра у запису броја ΔX је 1, те се осим $\Delta x = 0,2$ може узети и $\Delta x = 0,012$. ▲

2.6.3 Заокруживање резултата мерења

При формирању таблице и израчунавању резултата током израде експеримента биће неопходно усагластити измерену вредност са њеном апсолутном грешком. У тексту је раније наведено како је неправило за резултат мерења навести број који има више децималних места од апсолутне грешке придружене том мерењу. Стога, када се за неку измерену вредност утврди мајорирана апсолутна грешка, потребно је заокружити и саму измерену или израчунату вредност тако да она има једнак број децимала као и апсолутна грешка. При том, измерена вредност се заокружује у сагласности са **правилом парне цифре**. Размотримо неколико примера овог заокруживања:

Пример 1. За израчунату вредност $X = 543,21$ добија се мајорирана апсолутна грешка $\Delta x = 0,5$. Заокружити измерену вредност имајући у виду апсолутну грешку и приказати резултат у виду опсега.
Решење 1. Како је број децимала апсолутне грешке једнак један, неопходно је заокружити измерену вредност X на једну децималу. Користећи правило парне цифре добија се $x = 543,2$ те је коначно решење мерења $x = (543,2 \pm 0,5)$. ▲

Пример 2. Као резултат неког посредног мерења добија се $X = (14,535 \pm 0,064) \cdot 10^5$. Исправно приказати резултат овог мерења.
Решење 2. Апсолутна грешка се мајорира на прву већу вредност која има једну ненулту цифру, тј. $\Delta x = 0,07$. Одатле следи да је неопходно заокружити измерену вредност на две децимале те је $x = 14,54$, па је коначно решење $x = (14,54 \pm 0,07) \cdot 10^5$ ▲

Глава 3
Обрада експерименталних резултата

Принцип сређивања и обраде експерименталних резултата најлакше се демонстрира на конкретном задатку, па ће тако и бити изложен. На републичким и државним такмичењима из физике се, у последњих 15 до 20 година, као задатак даје, такозвани, мисаони експеримент тј. експеримент у ком су задате измерене вредности на основу којих треба израчунати неку величину или извести одређени закључак. У примеру обраде експерименталних резулата користићемо један такав задатак.

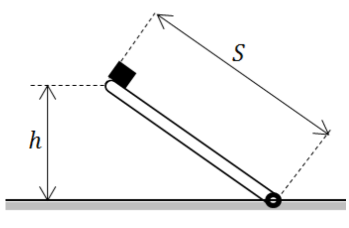
Пример. Помоћу непокретне стрме равни експерименталним путем се одређује убрзање Земљине теже g. Мало хомогено тело облика квадра се пусти да клизи низ глатку стрму раван, од врха до подножја, прелазећи увек исти пут $S = 80\text{cm}$, као на слици 3.1. Помоћу одговарајућих сензора одређена су времена t_i за које тело, кренувши из стања мировања, пређе тај пут S за различите висине h_i. Време је мерено дигиталним мерачем чија је тачност $C_t = 0,001\text{s}$. Ради једноставности занемарити грешке мерења висине h и пута S. У табели 3.1 су дати резултати мерења за пет различитих висина h.

h [cm]	28	30	34	36	40
t [s]	0,680	0,658	0,618	0,600	0,570

Табела 3.1: Зависност времена t од висине h

(а) Наћи теоријску зависност између мерених физичких величина.
(б) Нацртати одговарајући график.
(в) Графичком методом одредити убрзање Земљине теже и проценити грешку.

(Државно такмичење из физике 2010/11. школске године за 1. разред)

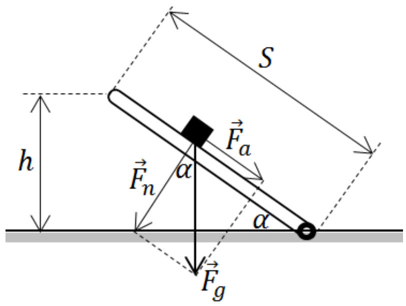


Слика 3.1: Поставка експеримента за мерење g

3.1 Извођење зависности

Решење. (а) Наћи теоријску зависност између мерених физичких величина значи извести израз који на неки начин повезује мерене вредности h и t, односно изразити једну у зависности (функцији) од друге. При изради овог дела задатка, проблем можемо посматрати као „обичан” задатак у коме треба израчунати једну вредност (h или t) преко друге.

Током кретања тела низ стрму раван, како је раван глатка, па је трење занемарљиво, плочицу масе m ће покретати само сила Земљине теже $F_g = mg$ која делује вертикално наниже. Ту силу можемо разложити на паралелну F_a и нормалну F_n компоненту у односу на раван, као на слици 3.2.



Слика 3.2: Разлагање сила на стрмој равни

На основу сличности између троугла коју стрма раван гради с подлогом и троугла чије су странице пројекције силе гравитације, као последица теореме о угловима са нормалним крацима, знамо да је

$$\frac{F_a}{mg} = \frac{h}{S} \quad \Longrightarrow \quad F_a = mg\frac{h}{S}.$$

За правац кретања тела дуж равни важи једначина Другог Њутновог закона

$$ma = F_a = mg\frac{h}{S} \quad \Longrightarrow \quad a = g\frac{h}{S}.$$

Како је ово кретање тела у ствари равномерно-убрзано без почетне брзине, важи и Закон пута у облику

$$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\cdot g\frac{h}{S}\cdot t^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{h} = \frac{g}{2S^2}\cdot t^2.$$

У експерименталним задацима се, по правилу, изрази за теоријску зависност, иако су овако постављени сасвим тачни, трансформишу тако да са једне стране једнакости буде само величина на коју не можемо директно утицати. У овом случају то је време t јер висину h можемо лако да променимо подизањем равни. Због тога, у овом случају, време називамо зависном, а висину независном промењљивом. Дакле, последњи израз можемо записати и као

$$t^2 = \frac{2S^2}{g}\cdot\frac{1}{h}. \qquad (*)$$

Овим је завршено извођење теоријске зависности. Поступак довођења формуле за зависност до крајњег облика $f(y) = const \cdot g(x)$, где су f и g елементарне функције, а x и y подаци из табеле, назива се **линеаризација графика**.

3.2 Опште карактеристике графика

(б) Линеарна функција која пресликава скуп X чији су елементи бројеви $x \in \mathbb{R}$ у скуп Y чији су елементи бројеви $y \in \mathbb{R}$ представља израз облика

$$y = k \cdot x + n.$$

Члан k из ове једначине називамо коефицијентом правца, док члан n називамо слободним. Уколико желимо да прикажемо све тачке y на графику, за овакву једначину добили бисмо праву. Испоставља се да на основу карактеристика задате праве можемо да израчунамо вредности k и n, што је и смисао графичког решавања експериманталних задатака. Коефицијент правца ћемо одредити на основу нагиба праве (што је права нагнутија, $|k|$ је веће, и обрнуто), док ћемо слободан члан одређивати као пресек графика и y осе.

Посебан облик линеарних функција представљају функције директне зависности (тј. пропорционалности). У тим функцијама, слободан члан једнак је нули, па је само $y = k \cdot x$. Једну такву функцију представља израз $(*)$. График овакве функције би требало да пролази кроз координатни почетак. Најчешће се задаци у основној школи задају овако, без слободног члана док се у средњој школи чешће јављају графици на којима је потребно одредити слободан члан, а понекад чак и екстремне вредности или интеграл функције на одређеном интервалу.

3.3 Формирање таблице

Израз $(*)$ представља директну зависност између квадрата времена t^2 и реципрочне висине $1/h$, тј. израз $t^2 = k \cdot (1/h)$, где је коефицијент правца $k = 2S^2/g$. Као што је раније поменуто у претходном одељку, након цртања графика, може се одредити k на основу нагиба праве, а касније из те вредности изразити g као $g = 2S^2/k$. С обзиром на то да је пут S познат, једина непозната неопходна за одређивање убрзања Земљине теже је коефицијент правца k.

Уколико су нове променљиве из израза $(*)$ (а то су t^2 и $1/h$) другачије од оних задатих у табели у задатку (t и h), на основу те табеле, и других познатих података, треба нацрати још једну таблицу за нове промењиве. Дакле, да бисмо нацртали поменути график морамо прво исписати таблицу вредности за промењиве $1/h$ и t^2 с обзиром на то да њихове вредности нису дате у задатку. Јединице физичких величина, при формирању таблица, стављаћемо у прво поље у угласте заграде поред ознаке величине, као што је раније приказано у задатку.

Пракса код експерименталних задатака је да се уз сваку вредност у табели одређује и њена грешка. Како је грешка за мерење висине занемарљива, за висину не морамо да додајемо још једну колону са вредностима за грешку те величине, тј. $\Delta(1/h)$. Да смо морали, поступак за рачунање $1/h$ би био нешто компликованији.

Прво што је потребно да урадимо како бисмо формирали таблицу за $1/h$ јесте да прерачунамо задате висине h из центиметара у основне SI јединице, дакле у метре. Ово је добра пракса јер се тиме смањује могућност прављења грешке у даљем поступку. Овим прерачуном добијамо нову врсту

h [m]	0,28	0,30	0,34	0,36	0,40

Табела 3.2: Врста висина у SI јединицама

Имајући у виду да је грешка занемарљива, вредности за $1/h$ налазе се простим рачунањем реципрочне вредности висине h. При израчунавању оваквих вредности треба водити рачуна да сви бројеви који се уписују имају једнак број децимала[1], тако да је погодно пре израчунавање унапред одредити колико ће децимала бити уписивано. Рецимо да ћемо у овом примеру уписивати две децимале. На местима где постоји мање децимала него што би требало неопходно је додати нуле на крај добијеног броја (као у случају петог мерења: $h_5 = 0,4\text{m}$; $1/h_5 = 2,5\ \text{m}^{-1} \ \Rightarrow\ 1/h_5 = 2,50\ \text{m}^{-1}$).

Применом већ навадених правила за заокруживање физичких величина добија се следећа таблица:

h [m]	0,28	0,30	0,34	0,36	0,40
$1/h$ [m^{-1}]	3,57	3,33	2,94	2,78	2,50

Табела 3.3: Потпуна таблица реципрочних висина

Сада је потребна врста за вредности квадрата времена (t^2) које добијамо простим квадрирањем свих времена појединачно. С обзиром на то да грешка времена (Δt) није занемарљива, не може се одмах проценити на колико децимала је могуће тачно да одредимо квадрат времена јер то зависи од вредности грешке. Зато ће добијене вредности бити уписиване у горњи десни угао поља. Исти поступак примењује се код свих величина чија грешка није нула. Вредности које добијамо квадрирањем углавном немају неки мали број децимала, па за те добијене квадрате сами процењујемо на колико децималних места ћемо израчунати број заокружити. Наравно, што је децимала више, то је мерење прецизније, али три до четири је сасвим довољно. Дакле, сада располажемо следећом таблицом:

t [s]	0,680	0,658	0,618	0,600	0,570
t^2 [s^2]	0,4624	0,4330	0,3819	0,3600	0,3249

Табела 3.4: Непотпуна врста квадрата времена

[1]На овај начин се постиже да све тачке буду уцртане на график са једнаком прецизношћу.

Знајући формулу за грешку квадрата, применом правила из претходне главе, добија се да је

$$\delta(t^2) = |2|\delta t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta\left(t^2\right)}{t^2} = 2\frac{\Delta t}{t} \quad \Longrightarrow \quad \Delta\left(t^2\right) = 2t^2 \cdot \frac{\Delta t}{t} = 2t\Delta t,$$

где је Δt једнако тачности мерења времена, тј. $\Delta t = C_t$. Ово је случај код свих директних мерења (оних која се добијају очитавањем вредности са инструмента)[2].

Сада за сваку колону треба одредити производ $2t\Delta t$ и добијену вредност на неколико децимала поново уписати у горњи десни угао поља $\Delta\left(t^2\right)$. Дакле, добијамо нову врсту

$\Delta\left(t^2\right)$ [s^2]	0,0014	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011

Табела 3.5: Непотпуна врста грешке квадрата времена

Сагласно правилима за заокруживање апсолутне грешке, добијене вредности се повећавају све док се не добије само једна ненулта цифра у запису. На пример, прву добијену грешку ($(\Delta(t^2))_1 = 0,0014$) заокружујемо (**мајорирамо**) до првог броја који у себи садржи само једну ненулту цифру. У овом случају, то је број $0,002$. У датом примеру се случајно догодило да су све грешке вредности $\Delta\left(t^2\right)$ једнаке[3], али то не мора увек да буде случај. Дакле, добијамо таблицу за грешке квадрата времена:

$\Delta\left(t^2\right)$ [s^2]	0,0014 0,002	0,0013 0,002	0,0012 0,002	0,0012 0,002	0,0011 0,002

Табела 3.6: Потпуна врста грешке квадрата времена

Сада се зна са коликом тачношћу је могуће одредити квадрат времена. У овом случају то је на трећу децималу. То се закључује на основу тога што се провери на ком месту је прва ненулта цифра у грешки за ту вредност. Дакле, сада се врше заокруживања вредности t^2 на три децимале по наведеним правилима и, коначно се добија табела за вредности времена:

t [s]	0,680	0,658	0,618	0,600	0,570
t^2 [s^2]	0,4624 0,462	0,4330 0,433	0,3819 0,382	0,3600 0,360	0,3249 0,325
$\Delta\left(t^2\right)$ [s^2]	0,0014 0,002	0,0013 0,002	0,0012 0,002	0,0012 0,002	0,0011 0,002

Табела 3.7: Потпуна таблица квадрата времена

[2]Треба водити рачуна јер се често јавља грешка да ђаци пишу $\delta(t^2) = (\delta t)^2$ и $\Delta(t^2) = (\Delta t)^2$, што није тачно.

[3]Евентуално су све грешке могле бити остављене на две децимале без мајорирања с обзиром на то да је прва ненулта цифра у њиховом запису, читајући са лева на десно, једнака један.

Спајањем ове таблице и таблице за вредности висина добија се коначна табела 3.8 која је потребна за цртање графика.

h [m]	0,28	0,30	0,34	0,36	0,40
$1/h$ [1/m]	3,57	3,33	2,94	2,78	2,50
t [s]	0,680	0,658	0,618	0,600	0,570
t^2 [s^2]	0,4624 0,462	0,4330 0,433	0,3819 0,382	0,3600 0,360	0,3249 0,325
$\Delta\left(t^2\right)$ [s^2]	0,0014 0,002	0,0013 0,002	0,0012 0,002	0,0012 0,002	0,0011 0,002

Табела 3.8: Вредности потребне за цртање графика

3.4 Основна правила за цртање графика

Графици се најчеће цртају графитном оловком дебљине $0,5$mm на милиметарском папиру величине А4. Осе графика треба уцртати, са стрелицама на крајевима, или на ивицама радног дела папира или увучене за по 1cm у односу на поменуту ивицу.

Ако се деси да су вредноси на y оси (оне за t^2) одређене на значајно више децимала него оне на x (тј. $1/h$), може се, по потреби, окренути папир вертикално јер тако добијамо прецизнији график. Ово се такође практикује када је интервал у коме су вредности за y осу значајно већи од оног у коме су вредности за x. Наиме, овим се постиже да, након цртања, график заузима већи део папира, те се вредности могу очитати са већом прецизношћу.

Даље, треба обележити осе графика на његовим крајевима (поред или изнад стрелица) користећи ознаке величина и одговарајуће јединице у угластим заградама. У нашем случају папир ћемо окренути хоризонтално, на x-оси ће бити независна променљива $1/h$ [m^{-1}] на коју можемо директно утицати, док ће на y-оси бити зависна променљива t^2 [s^2] коју меримо за различите вредности h. Још треба и написати наслов графика: „Зависност квадрата времена од реципрочне вредности висине”, али је то погодније урадити накнадно да права случајно не пресече наслов, што није пожељно.

3.5 Размера

Следећи корак што се тиче цртања графика био би одредити у којој размери се он црта, односно, колику вредност је потребно да један милиметар представља како би све тачке добијене у таблици могле да се уцртају.

3.5.1 Идеална размера

Величине радног дела милиметарског папира се разликују од произвођача до произвођача, у зависности од дебљине маргине. У нашем случају, користи се милиметарски део димензија 27cm × 18cm. У било ком другом случају може се применити исти поступак. Након што смо уцртали осе, потребно је одредити размеру. Размера представља вредности једног милиметра једне или друге осе на папиру. Осе могу имати различите размере. Размера се бира тако да се вредности из табеле могу лепо означити, али и да интервал тих вредности заузима што већи део осе, да би површина милиметарског папира била што више искоришћена. За бројне вредности размере се најчешће узимају бројеви облика[4]

$$1 \cdot 10^{\mathbb{Z}}, \quad 2 \cdot 10^{\mathbb{Z}}, \quad 4 \cdot 10^{\mathbb{Z}}, \quad 5 \cdot 10^{\mathbb{Z}}, \quad 8 \cdot 10^{\mathbb{Z}}, \quad 16 \cdot 10^{\mathbb{Z}} \quad ...$$

тј. такозвани умношци бројева 2 или 5. Ове размере називамо **природним размерама** јер је њих лако користити и уцртавати. Остале размере које се не користе су умношци броја 3 или неког другог простог броја (који није 2 ни 5). Треба напоменути да се размере облика $8 \cdot 10^{\mathbb{Z}}$ и $16 \cdot 10^{\mathbb{Z}}$, а понекад чак и $4 \cdot 10^{\mathbb{Z}}$ избегавају осим ако их није неопходно користити, с обзиром на то да се при њиховој употреби компликује рачун при уносу и очитавању података са графика.

Након што је формирана табела потребна за цртање графика, треба одредити колики распон вредности треба уцртати на одговарајуће осе. Распон вредности одређен је разликом најмање и највеће вредности коју треба означити на оси, за одређену физичку величину. Означимо ову разлику са D, и нека је L дужина дела милиметарског папира који нам је на располагању. **Идеална размера** r која би могла да се користи у овом случају била би

$$r = \frac{D}{L}.$$

Овако добијена размера најчешће није природног типа па је неопходно уместо ње користити неку другу, њој блиску по бројној вредности. Ако одаберемо размеру већу од r, дужина дела милиметарског папира који је потребно заузети ће се смањити, а ако одаберемо мању, поменута дужина ће се повећати. Јасно је да у другом случају интервал који треба да уцртамо не би стао на папир, па можемо закључити да је потребно узети неку размеру већу од r. Нека је R она природна размера која је већа од идеалне размере r, и коју ћемо користити за уцртавање тачака на осама.

3.5.2 Одабир размере

У нашем случају, на x оси треба представити интервал за реципрочне вредности висина између $(1/h)_5 = 2,50\text{m}^{-1}$ (која је најмања) и $(1/h)_1 = 3,57\text{m}^{-1}$ (која је највећа). То је дужина интервала $|1/h| = (1/h)_1 - (1/h)_5 = 1,07\text{m}^{-1}$. Како на располагању имамо $L_x = 27\text{cm} = 270\text{mm}$, можемо да нађемо идеалну размеру као количник дужине интервала и дужине осе на располагању:

$$r_x = \frac{|1/h|}{L_x} = \frac{(1/h)_1 - (1/h)_5}{L_x} = \frac{1,07\ \text{m}^{-1}}{270\text{mm}} = 0,00396\frac{\text{m}^{-1}}{\text{mm}}.$$

Дакле, за највећу искоришћеност x осе можемо да узмемо једну од две природне размере које се намећу: $R_x = 0,004\frac{\text{m}^{-1}}{\text{mm}}$ или $R_x = 0,005\frac{\text{m}^{-1}}{\text{mm}}$.

[4] $a^{\mathbb{Z}}$ ($a = const.$) је неформална ознака за скуп који се дефинише као $a^{\mathbb{Z}} = \{a^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Овакве процене о томе колику размеру треба узети се обично врше одокативно и праксом се значајно усавршавају, па после мало вежбе оваква рачуница неће више бити потребна. Узмимо да је у овом примеру размера $R_x = 0,005\frac{\mathrm{m}^{-1}}{\mathrm{mm}}$.

За y осу може се одредити идеална размера као

$$r_y = \frac{|t^2|}{L_y} = \frac{(t_1^2 - t_5^2)}{L_y} = \frac{(0,462 - 0,325)\mathrm{s}^2}{180\mathrm{mm}} = 0,00076\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{mm}}.$$

С обзиром на то да размере за x и y осу не морају да имају исте вредности, може се узети природна размеру $R_y = 0,001\mathrm{s}^2/\mathrm{mm}$ за y осу.

3.5.3 Означавање оса графика

Како је наш задатак, у ствари, да нацртамо један део координатног система на коме ћемо испитивати график, координатни почетак[5] не мора да има вредности $(0,0)$, већ његове координате бирамо тако да немамо превише празног простора. Та изабрана вредност мора да буде мања од најмањих вредности реципрочне висине и квадрата времена из таблице. У овом случају, за x вредност координатног почетка бирамо нпр. $2,35$, а за y вредност $0,320$.

Након одређивања координатног почетка, следећи корак је обележити неке вредности на једнаким размацима, на обе осе, како би се касније лакше уцртавале тачке и анализирао график. Да би се избегла претрпаност и неуредност графика, на свакој оси треба означити *само неколико подеока* тако да је могуће лако се снаћи, али, и да оса није препуњена. Вредности ових подеока *не морају нужно да буду једнаки измереним вредностима* осим ако се случајно не поклопе са њима. Размак између подеока треба бирати независно од података из табеле за цртање графика. Пример оваквог уцртавања на x оси може се видети на слици 3.3.

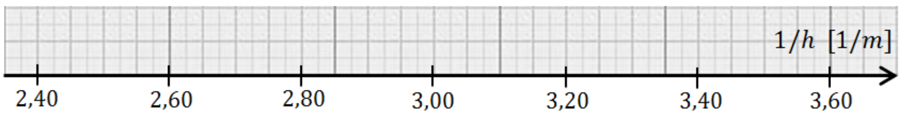
Имајући у виду да је размера једнака у свим деловима дате осе, лако се налази формула по којој се може израчунати дужина на милиметарском папиру L, тако да се на њој означена вредност на оси промени за неко d. Из формуле за израчнавање размере имамо

$$R = \frac{d}{L} \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{d}{R}.$$

Знајући ово, можемо да означимо неке вредности на x-оси на размацима од нпр. $0,20\mathrm{m}^{-1}$, почевши од рецимо $2,40\mathrm{m}^{-1}$. Како знамо да је размера $R_x = 0,005(\mathrm{m}^{-1})/\mathrm{mm}$, а вредност размака $d_x = 0,20\mathrm{m}^{-1}$, применом формуле од малочас налазимо да је $L_x = d_x/R_x = 40\mathrm{mm}$ дужина једног размака. Закључујемо да се размаци цртају на 40 квадратића јер је дужина сваког квадратића једнака једном милиметру. Након означавања вредности на x-оси, добијамо слику 3.3.

Приметимо да интервал вредности које треба да упишемо почиње на $(1/h)_5 = 2,50\mathrm{m}^{-1}$ што је врло близу почетка, а завршава се на $(1/h)_1 = 3,57\mathrm{m}^{-1}$ што је врло близу краја. То нам говори да је простор за график по том правцу добро искоришћен.

[5] У овом контексту, под координатним почетком се подразумева тачка пресека x и y осе на графику.



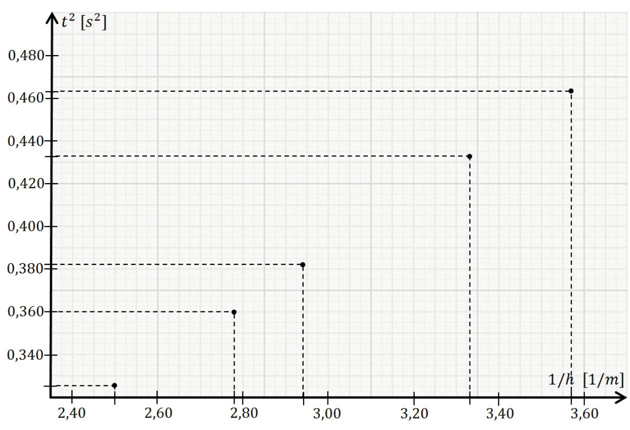
Слика 3.3: x-оса графика

Пређимо сада на y-осу. Означимо кораке од по $0,020\mathrm{s}^2$ почевши од координатног почетка. Како је размера $R_y = 0,001\mathrm{s}^2/\mathrm{mm}$, а $d_y = 0,020\mathrm{s}^2$ применом формуле за дужину интервала добијамо да је $L_y = d_y/R_y = 20\mathrm{mm}$, па кораке, слично као малочас, цртамо на размацима од по 20 квадратића. Слику y-осе нећемо сада давати, већ цртеж можете проверити на слици комплетног графика у даљем тексту.

3.6 Уцртавање тачака

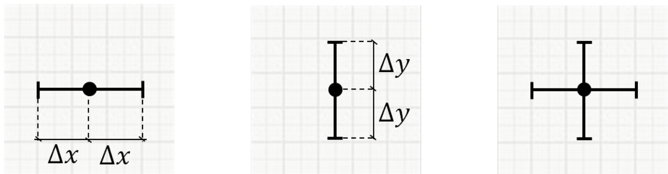
Посматрајмо поново таблелу са вредностима потребним за цртање графика. Свака колона садржи информације за једну тачку на графику која је одређена x координатом ($1/h$ вредношћу), y координатом (t^2 вредношћу), и одговарајућим грешкама $\Delta(1/h)$ и $\Delta(t^2)$. Тачке се означавају као мали испуњени кругови на пресеку хоризонталне и вертикалне линије милиметарског папира која одговара координати дате тачке.

На свакој оси обележимо сада вредности из табеле тако што ћемо на одговарајућој дужини да повучемо цртицу, користећи формулу $L = d/R$. Треба водити рачуна да се при овом означавању **не уносе бројне вредности на осама, већ само цртице!** У случају да неку тачку не можемо прецизно да сместимо, постављамо је на прву суседну линију, са леве или десне стране, у зависности од тога којој је ближа. Дакле, није правилно уцртати тачку ван пресека две линије. Помоћу лењира, без повлачења додатних дужи, можемо да конструишемо тачке на графику, као пресеке правих које пролазе кроз означене мере на осама. На слици 3.4 означени су положаји тих тачака. Треба имати на уму да испрекидане дужи са слике које воде од тачака ка осама не треба да постоје, а нацртане су да би се дочарало како се долази до тачака.



Слика 3.4: Експерименталне тачке на графику

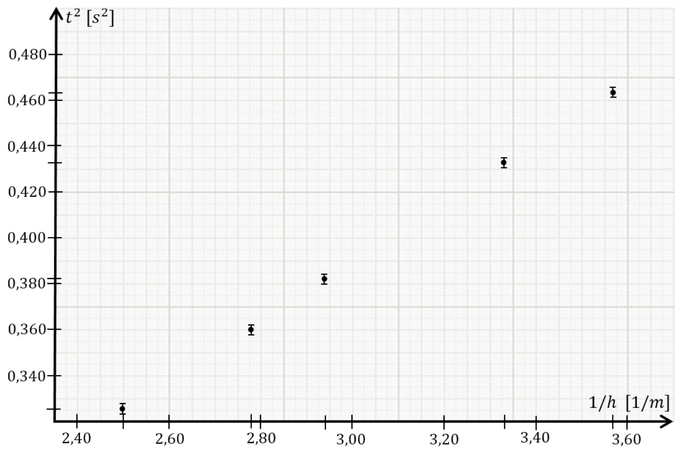
Грешке тачака се представљају као интервали око тачке по вертикалном или хоризонталном правцу. Примери означавања грешака, на увећаном делу папира, по осама, дати су на слици 3.5. Ознаке дужина Δx и Δy (са слике 3.5 (а) и (б)) не треба цртати, већ само дужи које одређују интервале.



(а) Тачка са x грешком   (б) Тачка са y грешком   (ц) Тачка са x и y грешком

Слика 3.5: Приказивање грешака на графику

Уцртавањем грешака добијамо дуж (слика (а) и (б)) или правоугаоник (слика (ц)) коме дата тачка припада. Како је у нашем примеру грешка висине занемарљива, грешка по x оси се не уцртава, већ грешке цртамо само по y оси, као на слици 3.5 (б). Из техничких разлога, немогуће је приказати греше тако да оне могу лепо да се виде на умањеној слици због тога што дужина грешке треба да буде по 2mm са обе стране тачке на папиру. Знајући наведена правила, сада за свих 5 тачака треба означити вредности грешака. На следећој слици 3.6 налази се график са уцртаним апсолутним грешкама тачака.



Слика 3.6: Експерименталне тачке са грешком на графику

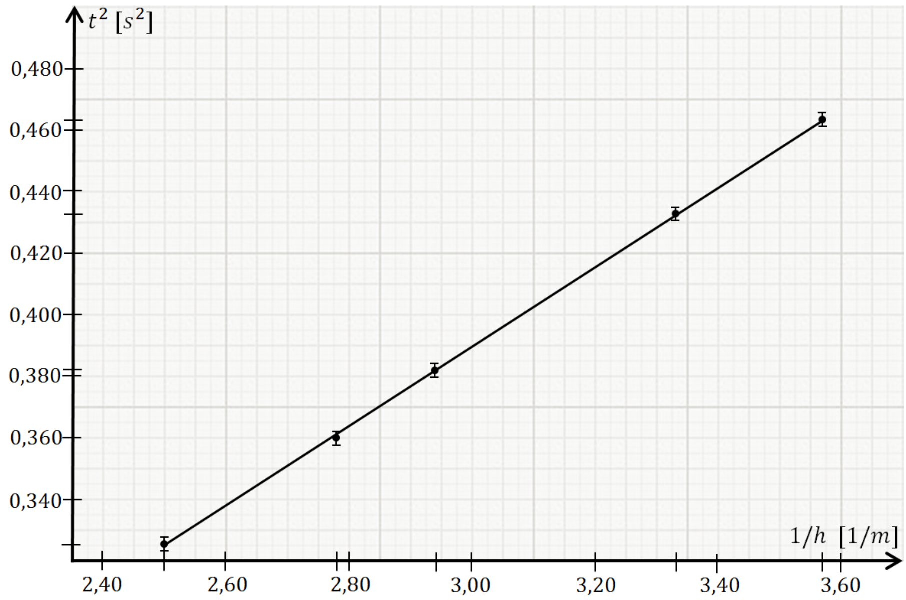
3.7 Провлачење праве

Постоји више различитих метода којим се може одредити начин за провлачење праве која најбоље апроксимира линеарну зависност на графику. Два најпознатија метода за такво одређивање су *графички директни метод* (одокативна метода) и рачунски *метод најмањих квадрата.*

3.7.1 Графички директан метод

Као што можемо да видимо са графика, добијене тачке су колико-толико колинеарне па кроз њих можемо да провучемо праву без много проблема.

Број правих које могу да се провуку је бесконачан, па би свако ко ово покуша да уради требало да добије, колико-толико, различито решење, али без великих разлика у односу на остале. Најбоље је за провлачење праве користити провидан дугачак лењир (дужине 30cm). Линија се повлачи између прве и последње тачке (са грешкама)[6], тако да пролази кроз све грешке осталих тачака. График са правом дат је на слици 3.7.



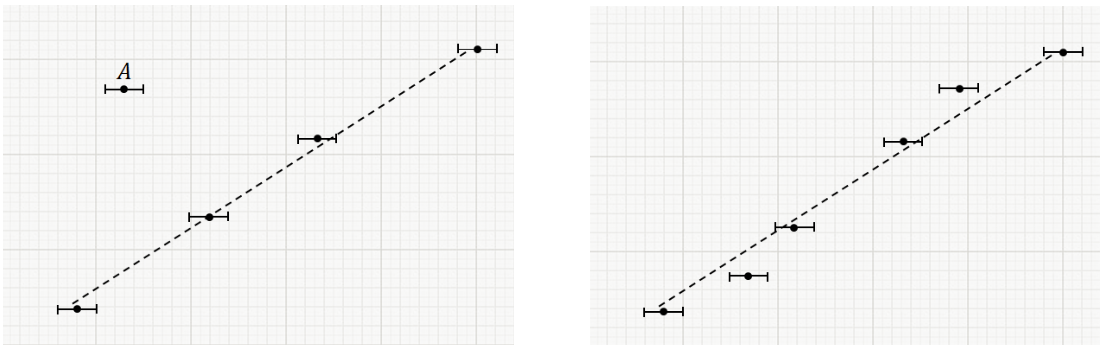
Слика 3.7: График са провученом правом и грешкама

Након дописивања наслова, цртање графика је завршено.

Дешава се, због случајних грешака и кварова на апаратури, да једна или две тачке очигледно „беже” са праве, па је њихов положај потпуно нелогичан. У таквим случајевима, ако можемо да објаснимо зашто је дошло до грешке, те тачке занемарујемо, проглашавамо их омашкама и понашамо се као да их нема. Један такав пример дат је на слици 3.8 (а). Очигледно је да тачка A представља неку већу грешку при мерењу.

Исто тако, не мора да се деси да права може да прође кроз све тачке. Тада се треба потрудити да се права постави тако да се са обе њене стране налази исти број тачака, и да је збир растојања између тачака и праве што мањи. Такав пример дат је на слици 3.8 (б). У нашем случају за то нема потребе јер постоји права која пролази кроз све грешке тј. тачке.

[6]Поједини чланови комисије за такмичења инсистирају на томе да се права искључиво црта између експерименталних тачака добијених у табели, док други сматрају да је код функција директне пропорционалности, када је то технички изводљиво, потребно укључити и тачку $(0,0)$ при провлачењу праве.



(а) Провлачење праве када постоји омашка

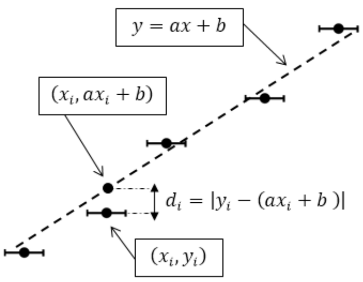
(б) Провлачење праве када она не може да прође кроз све грешке

Слика 3.8: Провлачење неких правих

3.7.2 Метод најмањих квадрата*

Осим графички директне методе, могуће је доћи до оптималне праве за линеарну зависност и рачунским путем. Постоји више различитих поступака за то, али, међу њима најпознатији је **метод најмањих квадрата**.[7]

Претпоставимо да права $y = ax + b$ са непознатим реалним коефицијентима a и b најбоље апроксимира скуп од n тачака чије су координате (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), као на слици 3.9.



Слика 3.9: Оптимална права са скупом тачака

Посматрајмо збир свих растојања d_i између експерименталних тачака и оптималне праве са слике 3.9.

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|$$

За најбољу апроксимацију би требало да ова сума постиже минималну вредност. Али, на основу теорије вероватноће и статистике, изводи се да се оптимална права заправо постиже када је сума квадрата ових растојања минимална. Дакле, биће

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 = \min \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{\partial a} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{\partial b} = 0.$$

[7] Метод најмањих квадрата се у литератури често означава скраћено као МНК.

Када се парцијални изводи са десне стране претходног израза распишу добија се следећи систем једначина

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i),$$
$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)(-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Методом замене, из последње две једначине могу се израчунати непознати коефицијенти a и b као

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$
$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}.$$

На основу последња два израза, за произвољно задате експерименталне тачке, могуће је аналитички израчунати коефицијент правца и слободан члан праве која би најбоље апроксимирала дати скуп тачака, и на основу њих провући праву на графику. Ако се са ω_i означи реципрочна вредност квадрата појединe грешке по y оси, односно

$$\omega_i = \frac{1}{\Delta y_i^2},$$

без извођења, наводимо изразе за грешке коефицијената a и b за метод најмањих квадрата:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i}{(\sum_{i=1}^{n} \omega_i)(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^2) - \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i\right)^2}}$$
$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^2}{(\sum_{i=1}^{n} \omega_i)(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^2) - \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i\right)^2}}.$$

Велика мана овог метода је то што је неопходно из таблице за цртање графика израчунати све суме које се појављују у овим изразима, те је за метод најмањих квадрата, у општем случају, неопходно издвојити много времена. На такмичењима из физике се **не захтева познавање овог метода**, и графичка метода за провлачење праве се узима као довољно прецизна. Због тога се у свим другим одељцима овог приручника након овог подразумева да је права провучена одокативном методом.

У специјалном случају када скуп (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n) описује функцију директне пропорционалности, оптимална права би имала облик $y = ax$, где је a непознати коефицијент. Тада се посматра минимум суме квадрата растојања $d_i = |y_i - ax_i|$ у нешто другачијем облику него малочас:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2 = \min \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} d_i^2}{\partial a} = 0.$$

Расписивањем парцијалног извода са десне стране добија се следећа једначина

$$2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)(-x_i) = 0.$$

Из последњег израза директно следи формула за израчунавање коефицијента правца

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Као што се може приметити, овај израз је знатно једноставнији за употребу од оног у општем случају.

Како бисмо применили метод најмањих квадрата у нашем примеру задатка, неопходно је да проширимо таблицу за цртање графика за две врсте: једну са вредностима $t^2 \cdot (1/h)$ (тј. $x_i y_i$) и једну са вредностима $(1/h)^2$ (тј. x_i^2). Након проширивања добијамо следећу таблицу 3.9:

$1/h$ [1/m]	3,57	3,33	2,94	2,78	2,50
t^2 [s^2]	0,462	0,433	0,382	0,360	0,325
t^2/h [s^2/m]	1,649	1,442	1,123	1,000	0,880
$1/h^2$ [1/m^2]	12,745	11,089	8,644	7,728	6,250

Табела 3.9: Вредности потребне за метод најмањих квадрата

Сумирањем две новодобијене колоне добија се $\sum(t^2/h) = 6,095\text{s}^2/\text{m}$ и $\sum 1/h^2 = 46,456\text{m}^{-2}$. Из ове две вредности се израчунава непознати коефицијент правца по утврђеној формули као

$$k = a = \frac{\sum(t^2/h)}{\sum(1/h^2)} = \frac{6,095\text{s}^2/\text{m}}{46,456\text{m}^{-2}} = 0.1312\text{ms}^2.$$

Треба имати на уму да ако у поставци задатка експлицитно пише да је неопходно одредити неку вредност графичким путем, права на графику мора бити провучена и само нумеричко решење неће бити признавано.

3.8 Одређивање коефицијента правца

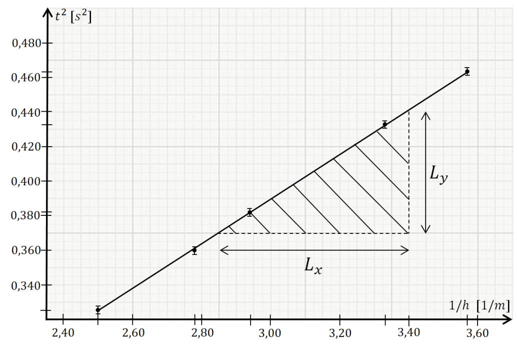
(в) Подсетимо се зависности (∗) која повезује квадрат времена и реципрочну вредност висине од пре неколико страна:

$$t^2 = \frac{2S^2}{g} \cdot \frac{1}{h} \qquad (*)$$

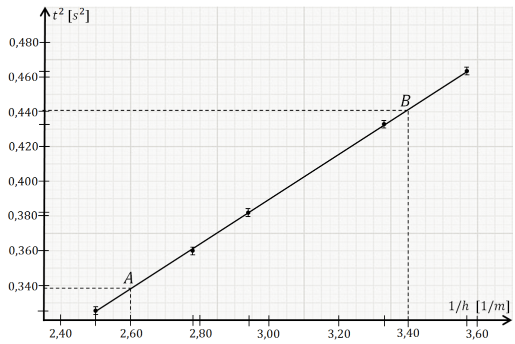
Члан овог израза $2S^2/g$ назива се коефицијентом правца праве или нагибом праве и он се може одредити са графика. Уколико га означимо са k, можемо записати да је

$$t^2 = k \cdot \frac{1}{h} \qquad \text{одакле налазимо да је} \qquad k = \frac{t^2}{1/h} = \frac{L_y}{L_x}$$

где су L_x и L_y катете неког правоуглог троугла који права гради са правцима паралелним са осама, као на слици 3.10 (а) где је један такав троугао шрафиран. Таквих троуглова има бесконачно много, али постоји дефинисано правило за одређивање вредности k. Поступак за одређивање нагиба је следећи: Одаберимо две тачке A и B на правој, једну између прве две и једну између последње две експерименталне тачке. Тачке изабрати тако да се оне налазе тачно на пресеку једне хоризонталне и једне вертикалне праве на графику. Треба водити рачуна да се изабране тачке не поклопе са оним експерименталним. Након што смо их изабрали и означили, спустимо нормале из тих тачака на осе у виду испрекиданих линија. Очитајмо координате тих тачака и записхимо их. На нашем графику две такве тачке су $A = (2,60\text{m}^{-1}, 0,338s^2)$ и $B = (3,40\text{m}^{-1}, 0,441s^2)$, као на слици 3.10 (б). Одговарајуће координате ових тачака означавају се са X_A, Y_A, X_B и Y_B.



(а) Неки трогуао са ког може да се одреди нагиб



(б) Тачке за одређивање нагиба на графику

Слика 3.10: Одређивање нагиба праве на графаику

Као што смо раније утврдили, нагиб је једнак количнику насправмне и налегле катете правоуглог троугла, па важи

$$k = \frac{L_y}{L_x} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{(0,441 - 0,338)\text{s}^2}{(3,40 - 2,60)\text{m}^{-1}} = 0,1288\text{ms}^2.$$

Како још увек не знамо грешку за k, добијену бројну вредност треба заокружити на нешто више децимала (три до четири), док не одредимо вредност грешке.

Корисно је након израчунавања вредности за k проверити да ли се њене јединице слажу са очекиваним јединицама из зависности ($*$) пре наставка поступка. Оваква провера назива се **димензиона анализа** и за већ одређено $[k] = 1ms^2$ врши се тако што се из израза ($*$) очита формула по којој се k рачуна и упореде добијене физичке јединице. Дакле,

$$k = \frac{2S^2}{g} \quad \Longrightarrow \quad [k] = \frac{[S^2]}{[g]} = \frac{1\text{m}^2}{1\text{m/s}^2} = 1\frac{\text{m}^2\text{s}^2}{\text{m}} = 1\text{ms}^2,$$

па се на основу једнакости јединица може очекивати да је израчуната вредност нагиба тачна.

Помоћу формула за извођење грешака добија се да је

$$
\begin{aligned}
k = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \quad &\Longrightarrow \quad \delta k = \delta\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) \\
&\Longrightarrow \quad \delta k = \delta(Y_B - Y_A) + \delta(X_B - X_A) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta(Y_B - Y_A)}{Y_B - Y_A} + \frac{\Delta(X_B - X_A)}{X_B - X_A} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta Y_B + \Delta Y_A}{Y_B - Y_A} + \frac{\Delta X_B + \Delta X_A}{X_B - X_A},
\end{aligned}
$$

при чему се по правилу за вредности апсолутних грешака тачке A или B узимају веће од грешака суседних експерименталних тачака на графику. Уколико за неку осу нема грешке, за грешку тачке узима се вредност најмањег подеока (једног милиметра тј. вредност размере) по тој оси.

Корисно је приметити да формуле за израчунавање коефицијента правца и његове апсолутне грешке графичким путем, а то су

$$
k = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \quad \text{и} \quad \Delta k = k\left(\frac{\Delta Y_B + \Delta Y_A}{Y_B - Y_A} + \frac{\Delta X_B + \Delta X_A}{X_B - X_A}\right),
$$

важе увек у истом облику независно од задатка у коме се користе.

Како је у нашем случају грешка по x занемарљива, а све грешке за y су једнаке, можемо да одредимо грешку нагиба по већ наведеној општој формули:

$$
\begin{aligned}
\Delta k &= k\left(\frac{\Delta Y_B + \Delta Y_A}{Y_B - Y_A} + \frac{\Delta X_B + \Delta X_A}{X_B - X_A}\right) \\
&= 0,1288\mathrm{ms}^2 \cdot \left(\frac{(0,002 + 0,002)\mathrm{s}^2}{(0,441 - 0,338)\mathrm{s}^2} + \frac{(0,005 + 0,005)\mathrm{m}^{-1}}{(3,4 - 2,6)\mathrm{m}^{-1}}\right) = 0,0066\mathrm{ms}^2.
\end{aligned}
$$

Сагласно правилима за мајорирање грешке следи да је $\Delta k = 0,007\mathrm{ms}^2$, па је и $k = 0,129\mathrm{ms}^2$, тј.

$$
k = (0,129 \pm 0,007)\mathrm{ms}^2.
$$

3.9 Одређивање тражене величине

Из зависносности $(*)$ са почетка решења задатка добија се начин на који се g одређује преко k:

$$
k = \frac{2S^2}{g} \quad \Longrightarrow \quad g = \frac{2S^2}{k} = 9,923\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.
$$

Како се још увек не зна тачна вредност грешке за g, добијена вредност се не може одмах заокружити већ се оставља незаокружена са неколико децималних места. Знајући да су грешке константних реалних бројева једнаке нули и да је грешка за пут занемарљива (по услову задатка), добија се

$$
\begin{aligned}
g = \frac{2S^2}{k} \quad &\Longrightarrow \quad \delta g = \delta\left(\frac{2S^2}{k}\right) = \delta(2S^2) + \delta k \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta(2S^2)}{2S^2} + \frac{\Delta k}{k} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta k}{k} \quad \Longrightarrow \quad \Delta g = g\frac{\Delta k}{k} = 0,54\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.
\end{aligned}
$$

Заокруживањем се добија да је $\Delta g = 0,6\mathrm{m/s}^2$ и да је $g = 9,9\mathrm{m/s}^2$. Коначно решење се записује у облику

$$g = (9,9 \pm 0,6)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \quad \blacktriangle$$

Иако није неопходно, након завршеног израчунавања коначног решења, погодно је израчунати релативну грешку како би се оценила прецизност одабраног поступка мерења. У овом примеру је

$$\delta g = \frac{\Delta g}{g} = \frac{0,6}{9,9} \approx 0,061 = 6,1\%,$$

па се може закључити да је мерење прихватљиве прецизности.

Осим тога, у задацима као што је овај када је потребно израчунати неку константу, требало би проверити да ли таблична вредност припада понуђеном интервалу решења. У овом примеру важи $g_{BG} = 9,81\mathrm{m/s}^2 \in (9,9 \pm 0,6)\mathrm{m/s}^2$ што додатно говори о тачности добијеног решења.

При анализи добијене тражене величине потребно је разликовати термине *прецизност* и *тачност* решења. Прецизност говори о томе колико је велики добијени опсег вредности, тј. колика је апсолутна грешка у односу на добијену вредност. За опсивање прецизности најпогодније је користити релативну грешку. Са друге стране, тачност мерења говори о томе колико је добијена вредност блиска са оном вредношћу која се очхекује као резултат експеримента. Наравно, ако резултат експеримента није ни отприлике познат унапред, тачност је немогуће проценити. У овом случају, мерење је тачно и сразмерно прецизно.

3.10 Варијације у поставци експерименталних задатака

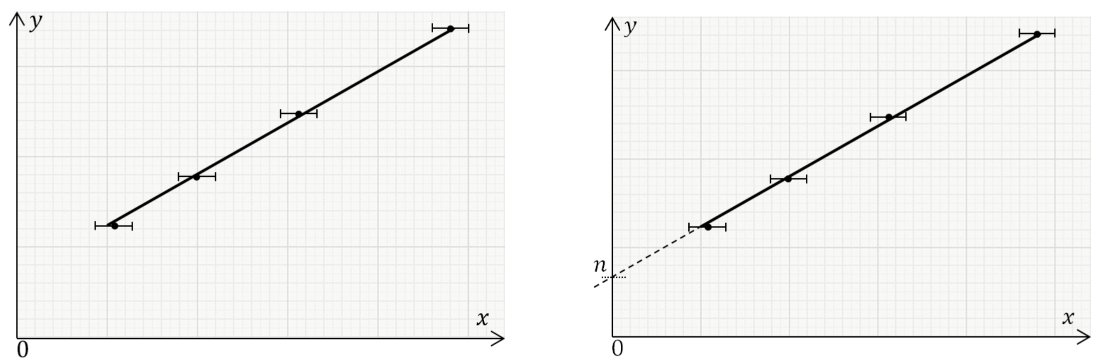
Нажалост, не постоји довољно једноставан експеримент у чијој изради се могу обрадити сви постојећи детаљи при обради експерименталних резултата. Зато ће у овом одељку бити посебно објашњени они који су изостављени у задатку који је раније обрађен.

3.10.1 График са слободним чланом

Линеарне зависности не морају да буду искључиво директне ($y = kx$) већ постоје и оне са слободним чланом ($y = kx + n$), па се у задацима може тражити да се одреди тај слободан члан као и његова грешка.

При одређивању слободног члана веома је битно да се за координатни почетак узме вредност $(0, \mathbb{R})$. Дакле, x-оса треба да почиње од нуле, а y-оса од неког реалног броја. Али, такође, треба имати на уму да вредност слободног члана мора бити изнад координатног почетка како би она могла да се очита приликом анализе графика, па тако неће сви избори вредности почетка y-осе бити погодни. Понекад је неопходно пре самог цртања графика проценити колико ће n бити, па на основу тога изабрати почетак y осе.

Рецимо да имамо већ нацртану праву на графику, као са слике 3.11 (а).



(а) Већ нацртана права (б) Права са продужетком

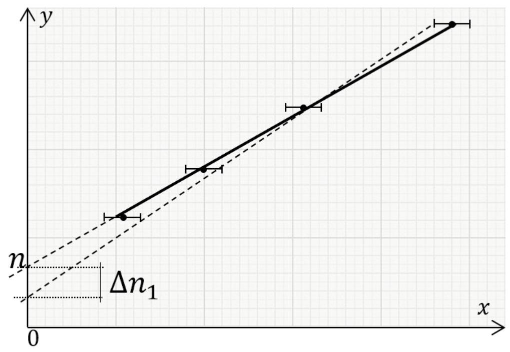
Слика 3.11: Одређивање слободног члана

Продужимо сада праву тако да она пресече y-осу (продужетак представља испрекидани део са слике 3.11 (б)). Место на ком тај продужетак праве сече осу има вредност n која се одређује простим очитавањем.

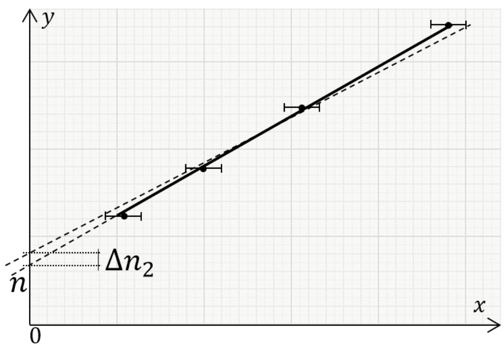
Провуцимо сада још две праве на графику, једну највећег (слика 3.12 (а)) и једну најмањег могућег нагиба (слика 3.12 (б)), али тако да оне још увек пролазе кроз све грешке.

Нека су n_1 и n_2 вредности на којима ове нове праве секу y-осу, а Δn_1 и Δn_2 апсолутне разлике између тих вредности и очитане вредности слободног члана. Дакле, ако је $\Delta n_1 = |n - n_1|$, а $\Delta n_2 = |n - n_2|$, грешка слободног члана се тада одређује по формули

$$\Delta n = \frac{1}{2}(\Delta n_1 + \Delta n_2).$$



(а) Права највећег нагиба



(б) Права најмањег нагиба

Слика 3.12: Одређивање грешке слободног члана

Евентуално, ако се деси да је највећа грешка за неку експерименталну тачку по y-оси са графика већа од добијене вредности, за грешку слободног члана се узима та највећа вредност, али то је редак случај.

За случај да се слободан члан n надаље користи у формули за израчунавање неке друге вредности, примењују се иста правила за одређивање грешке те вредности као из одељка 2.4.

3.10.2 Табела са више редова

Као што је познато, што се више пута понови неко мерење, резултат који се добија би требало да буде прецизнији. Зато постоје примери задатака у којима је дата табела где је уместо, на пример, једног измереног времена, дато више, за исти случај. Рецимо да се за сваку висину h из примера експерименталног задатка четири пута мери време и да је задата следећа таблица 3.10 за једну од тих висина.

	h[m]	t[s]
1		0,683
2		0,680
3	0,28	0,681
4		0,678

Табела 3.10: Пример са више мерења исте величине

Да би време кретања тела за ту висину користило у даљем рачуну, сва четири времена треба представити као једно, средње време (t_s)[8] уз одговарајућу грешку (Δt_s). Средња вредност времена је аритметичка средина свих мерених времена, односно количник збира свих времена и броја мерења. Дакле, за n мерења

$$t_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{n}\cdot(t_1 + t_2 + \cdots + t_n).$$

У нашем случају са 4 мерења добија се

$$t_s = \frac{1}{4}\cdot(0,683 + 0,680 + 0,681 + 0,678)\mathrm{s} = 0,6805\mathrm{s}.$$

[8]У литаратури се за средњу вредност произвољне величине t равноправно користе ознаке t_s, $\bar{t}$ и $< t >$.

Добијену вредност уписујемо у горњи десни угао нове колоне, малим бројкама, јер још увек не знамо њену грешку.

Код рачунања средње вредности, апсолутна грешка представља највећу разлику између неке појединачне измерене вредности и средње вредности тј. $\Delta t_s = \max\{|t_s - t_i|\}$ у овом примеру. Одузимањем редом добијају се $0,0025$s, $0,0005$s, $0,0005$s, $0,0025$s одакле је очигледно да је највећа грешка $0,0025$s, односно $0,003$s када се заокружи. Коначним заокруживањем средње вредности и уписивањем добија се таблица 3.11:

	h [m]	t [s]	t_s [s]	Δt_s [s]
1		0,683	0,6805	0,0025
2		0,680		
3	0,28	0,681	0,680	0,003
4		0,678		

Табела 3.11: Обрађена табела за више мерења исте величине

Након одређивања грешке за средње време, поставља се питање коју вредност користити за грешку овог израчунатог времена t_s, тачност инструмента или грешку средње вредности времена. У оваквим случајевима узима се она већа грешка. Ако се подсетимо, тачност нашег дигиталног мерача је $C_t = 0,001$s па бисмо у овом конкретном примеру надаље уместо грешке времена $\Delta t = C_t$, користили да је $\Delta t = \Delta t_s$ јер је $\Delta t_s > C_t$.

3.10.3 Нелинеарне функције*

У теорији је могуће задати и нелинеарну функцију као једначину за коју је потребно нацртати график. Али, то се врло ретко практикује јер се прво, та функција не може прецизно нацртати, а друго, да може, са њом би било јако тешко оперисати и испитивати је. Са графика нелинарног типа могуће је, на пример, одредити површину испод криве пребројавањем квадратића на милиметарском папиру, или очитати неке екстремне вредности или асимптоте.

Добар пример обраде података код нелинеарних функција је, рецимо, анализа спектралне емисионе моћи апсолутно црног тела. На графику се тада може одредити таласна дужина максималног зрачења, као и енергија тог зрачења. Овакав задатак јавио се 2010. године на државном такмичењу за 4. разред средње школе.

Поговор

У овом приручнику демонстриран је принцип основне (ручне) анализе и обраде резултата у мисаоним експериментима из физике, онако како се од ученика захтева да то раде на такмичењима и у школи. Како су експерименталне вежбе саставни део у настави физике, анализа резултата тих експеримената је од велике важности за разумевање принципа сазнања путем провере.

Наравно, овакав метод рада користили су и научници, али у временима када напредна компјутерска апаратура није била доступна. Следећи корак у развијању способности обраде резултата експеримената за ученике био би упознавање са неким од софтверских алата који се нуде. Такви су, на пример:

- *MatLab*, о коме се може више сазнати на адреси `http://www.mathworks.com/products/matlab/`
- *Origin/OriginPro*, о коме се може више сазнати на адреси `http://www.originlab.com/index.aspx?go=PRODUCTS/Origin`.

За рад са сигналима и за потребе прикупљања података са (реалне) апаратуре, погодан је и

- *LabView*, о коме се може више сазнати на адреси `http://www.ni.com/labview/`.

Литература

[1] Рак Лајош, др Слободан Бацковић, Нада Маринковић: *Техника физичког експеримента за III разред усмереног образовања природно-техничке струке, физичко-техничког смера*, Научна књига, Београд, прво издање, 1979. година

[2] др Душанка Обрадовић, др Божидар Вујичић, др Јован Шетрајчић: *Практикум експерименталних вежби из физике*, Природно-Математички факултет, Нови Сад, прво издање, 1991. година

[3] др Владета Урошевић, др Ђура Крмпотић: *Приручник из примењене физике за IV разред усмереног образовања, природно-техничке струке*, Научна књига, Београд, прво издање, 1981. година

[4] др Драгиша Ивановић, Живојин Ћулум, Милан Распоповић, др Јарослав Лабат: *Приручник за лабораторијске вежбе и рачунске задатке из физике за IV разред усмереног образовања, природно-техничке, математичко-техничке, хидрометеоролошке и грађевинске струке*, Научна књига, Београд, прво издање, 1986. година

[5] др Милан Напијало, др Бошко Ћирилов, мр Миодраг Шмелцеровић: *Приручник из примењене физике за III разред усмереног образовања природно-техничке струке, физичко-техничког смера*, Научна књига, Београд, друго издање, 1981. година

[6] проф. др Мићо Митровић: *Припреме олимпијаца - експериментални задаци*, документ достављен *e-mail*-ом