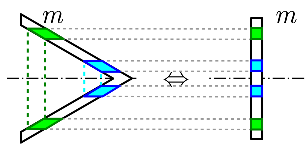
**Максималним бројем поена оценити и сваки други смислен поступак који води до тачног решења. Уколико је у кључу дато више начина решавања истог дела задатка, бодовати *само* по оном који је погоднији за ученика, без сабирања поена за оба понуђена начина.**

**1.** (а) **I начин (*геометријски*).** У дефиниционом изразу за момент инерције скупа материјалних тачака фигуришу само масе и растојање од осе ротације. На основу тога, може се закључити да је момент инерције независан од транслације одговарајућих делова тела паралелно оси ротације $\boxed{\mathbf{2п}}$. Уколико се površ купе подели по висини на велики број танких прстенова, може се приметити да се ти прстенови могу „наслагати“ транслацијом дуж осе ротације, у диск полупречника $R$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.




Будући да се површина попречног пресека ових прстенова не мења, као што је илустровано на слици, диск који се добија транслацијом одговарајућих парчади је хомоген $\boxed{\mathbf{1п}}$. На основу тога, израз за момент инерције дате купасте љуске исти је као и израз за момент инерције хомогеног диска масе $m$, односно, $I = \frac{1}{2}mR^2$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Укупна површина фишека, омотача купе, је $S = \pi R s$, па је његова маса $m = \sigma S = \sigma\pi R s$. Коначно, израз за момент инерције је $I = \frac{1}{2}\sigma\pi s R^3$ $\boxed{\mathbf{1п}}$.

**II начин (*аналитички*).** Површ купе се по изводници $s$ може равномерно изделити на велики број, $n$, попречних трака свака ширине $\Delta s = s/n$, од којих свака представља један танак прстен са центром на оси купе $\boxed{\mathbf{1п}}$. Полупречник средње линије $k$-те траке се може изразити на основу пропорције као $r_k = kR/n$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Маса $k$-те траке се може изразити помоћу њене површине $\Delta S_k = 2\pi r_k \Delta s$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ и површинске густине масе, тј. $\Delta m_k = \sigma \Delta S_k$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Допринос моменту инерције од $k$-те траке може се записати као момент инерције танког прстена, па је $\Delta I_k = \Delta m_k r_k^2$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, одакле је заменом $\Delta I_k = \dfrac{2\sigma\pi k^3 R^3 s}{n^4}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Укупан момент инерције добија се сабирањем момената инерције свих трака, односно, $I = \Delta I_1 + \Delta I_2 + \ldots \Delta I_n = \dfrac{2\sigma\pi R^3 s}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right)$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Применом приближног израза за збир трећих степена првих $n$ природних бројева добија се резултат $I = \frac{1}{2}\sigma\pi s R^3$ $\boxed{\mathbf{1п}}$.

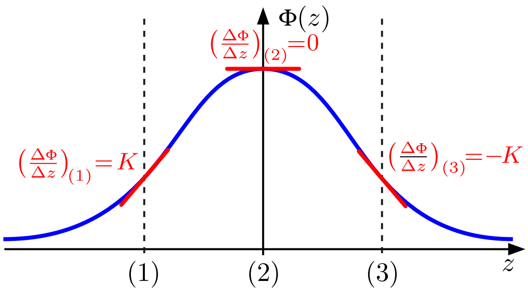
(б) По услову задатка,реституциони момент силе је $\mathcal{M} = -k\theta$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, док је према другом Њутновом закону $\mathcal{M} = I\alpha$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, где је $\alpha$ одговарајуће угаоно убрзање. По аналогији са једначином транслаторног линеарног хармонијског осцилатора $a + \omega^2 x = 0$, добија се једначина линеарног хармонијског осциловања $\alpha + \omega^2\theta = 0$, где је $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{I}}$ кружна учестаност слободних малих осцилација $\boxed{\mathbf{2п}}$. Тражени период се онда може одредити на основу кружне учестаности осциловања као $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k}}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

(в) Тражена бројна вредност момента инерције је $I \approx 11{,}3\,\mathrm{g\,cm^2}$ (или у SI: $I \approx 1{,}13 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$) $\boxed{\mathbf{2п}}$, док период осциловања износи $T \approx 1\,\mathrm{s}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

**2.** Због симетрије, јачина електричне струје у свих $m$ грана са батеријама је иста, $I$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Према Кирхофовом закону за струје за пресек који обухвата паковање батерија, јачина струје која се успоставља на потрошачу је $I_\mathrm{p} = mI$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Према Кирхофовом закону за напоне, за контуру која пролази кроз једну од грана са батеријама и потрошач, важи да је $n\mathcal{E} - nIr - mIR_\mathrm{p} = 0$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Решавањем добијене једначине по струји кроз гране са батеријама налази се $I = \dfrac{n\mathcal{E}}{nr + mR_\mathrm{p}}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Коначно, налази се струја потрошача $I_\mathrm{p} = \dfrac{N\mathcal{E}}{nr + mR_\mathrm{p}}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Снага потрошача је $P = I_\mathrm{p}^2 R_\mathrm{p}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, тако да ће тражена снага бити максимална када је јачина електричне струје потрошача максимална. Максимална струја се постиже када је вредност израза у имениоцу $nr + mR_\mathrm{p} \equiv \mathcal{R}$ минимална $\boxed{\mathbf{2п}}$. Свођењем израза на једну непознату, по $n$, добија се $\mathcal{R} = nr + \dfrac{NR_\mathrm{p}}{n}$. Минимална вредност се може одредити на различите начине, један од којих је табелирање свих вредности $n$ које деле број батерија $N = 48$, као што је приказано у табели.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 | 16 | 24 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{R}$ [$\Omega$] | 57,9 | 29,4 | 20,1 | 15,6 | 11,4 | 9,6 | **8,4** | **8,4** | 9,6 | 15,6 |

На основу табеле минимална вредност релевантног параметра постиже се за $n \in \{12, 16\}$, па постоје **два оптимална решења** за $(n,m)$: (12,4) $\boxed{\mathbf{2п}}$ и (16,3) $\boxed{\mathbf{2п}}$. Максимална вредност снаге која се остварује у оба случаја износи $P_{\max} = \left(\dfrac{N\mathcal{E}}{\min\{\mathcal{R}\}}\right)^2 R_\mathrm{p} \approx 88\,\mathrm{W}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

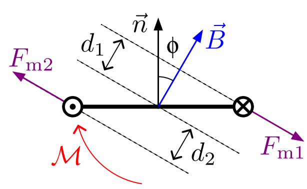



**3.** Означимо са $v^{(1)}$ и $v^{(3)}$ редом бројне вредности тренутне брзине $v(t)$ магнета у положајима (1) и (3), а са $\Phi(t)$ тренутну вредност магнетног флукса кроз површ прстена која се мења услед кретања магнета. Индукована електромоторна сила у прстену одређена је Фарадејевим законом $\mathcal{E}_\mathrm{ind} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, односно, брзином промене магнетног флукса у јединици времена $\boxed{\mathbf{2п}}$. Тренутна брзина штапића је $v = \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$, где је $\Delta z$ тренутни померај штапића дуж осе прстена у јединици времена $\Delta t$. Заменом добијеног резултата у Фарадејев закон добија се $\mathcal{E}_\mathrm{ind} = -v\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Због геометрије проблема, флукс је просторно симетричан у зависности од положаја штапића, $\Phi(z)$, око положаја (2), попут примера илустрованог на слици. У положају (1) флукс расте, јер се магнет приближава прстену. Даље, $\Phi(t)$ достиже свој максимум у положају (2), након чега се смањује. Према томе је $\left(\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z}\right)_{(1)} = -\left(\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z}\right)_{(3)}$, одакле се може писати $\dfrac{\mathcal{E}^{(3)}_\mathrm{ind}}{\mathcal{E}^{(1)}_\mathrm{ind}} = \dfrac{-v^{(3)}\left(\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z}\right)_{(3)}}{-v^{(1)}\left(\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z}\right)_{(1)}} = -\dfrac{v^{(3)}}{v^{(1)}}$ (†). Користећи ову формулу можемо израчунати $\mathcal{E}^{(3)}_\mathrm{ind}$ у случајевима (а) и (б), након што пронађемо однос одговарајућих брзина.

(а) Како је прстен отворен, а његови капацитивни ефекти се занемарују, дуж обода прстена се не индукује било каква електрична струја, те тиме не постоји ни индуковано магнетно поље којим би прстен деловао на магнетни штапић, па је повратна сила којом прстен делује на магнет који пада равна нули, $F = 0$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Како нема магнетних сила које се противе кретању магнета, закључује се да он слободно пада константним убрзањем $g$ у вакууму $\boxed{\mathbf{1п}}$. Како магнет слободно пада без почетне брзине, квадрати ових брзина су пропорционални пређеном путу од почетка кретања, па је $v^{(3)}/v^{(1)} = \sqrt{(h+\ell)/h} = 2$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, те користећи формулу (†) добијамо $\mathcal{E}^{(3)}_\mathrm{ind} = -2\mathcal{E}^{(1)}_\mathrm{ind} = +1{,}5\,\mathrm{V}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. У положају (2) је $\left(\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta z}\right)_{(2)} = 0$, јер је то максимум функције $\Phi(z)$, па је $\mathcal{E}^{(2)}_\mathrm{ind} = 0\,\mathrm{V}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

(б) У случају када се штапић креће у вискозној средини, након довољно дугог времена успоставља се терминална брзина, односно, штапић се креће устаљеном брзином $\boxed{\mathbf{1п}}$. У овом случају, брзине у тачкама (1) и (3) су због тога једнаке, па је $\mathcal{E}^{(3)}_\mathrm{ind} = -\mathcal{E}^{(1)}_\mathrm{ind} = +0{,}75\,\mathrm{V}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Из истих разлога као под (а), индукована електромоторна сила у тачки (2) је равна нули, $\mathcal{E}^{(2)}_\mathrm{ind} = 0$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, као и магнетна сила која делује на штапић $F = 0$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

*Напомена*: бодови се признају у целости ако је ученик квалитативно образложио своје решење ослањајући се на симетрију и Ленцово правило, чак и без детаљног квантитативног приступа који је овде представљен. Такође, образложење да двоструко већа брзина повлачи двоструко већу индуковану електромоторну силу признати са максималним бројем поена за тај део задатка, чак и одсуству детаљног формализма.




**4.** (а) **I начин.** Вектор магнетне силе која делује на прави део проводника дат је изразом $\vec{F}_\mathrm{m} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, где је $\vec{\ell}$ вектор дужине проводника чији је интензитет једнак његовој дужини, а смер одговара референтном смеру струје која је успостављена у њему $\boxed{\mathbf{2п}}$. Моменти магнетних сила који делују на странице квадратног рама управне на $z$-осу се међусобно потиру $\boxed{\mathbf{3п}}$, док се интензитети момената преостала два сегмента сабирају, $\mathcal{M}_{\mathrm{m}1,2} = F_{\mathrm{m}1,2} \cdot d_{1,2}$, где је $d_{1,2}$ крак одговарајућих сила $F_{\mathrm{m}1,2}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Према слици је $F_{\mathrm{m}1,2} = IaB$, док су одговарајући краци тих сила $d_{1,2} = \dfrac{a}{2}\sin\phi$, па је укупан интензитет спрега $\mathcal{M}_\mathrm{m} = \mathcal{M}_{\mathrm{m}1} + \mathcal{M}_{\mathrm{m}2} = Ia^2B\sin\phi$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

**II начин.** Интензитет спрега магнетних сила може се наћи и као $\mathcal{M}_\mathrm{m} = |\vec{m}\times\vec{B}| = mB\sin(\phi)$ $\boxed{\textbf{4п}}$, где је $\vec{m} = Ia^2\,\vec{n}$ $\boxed{\textbf{3п}}$ вектор магнетног момента рама, па је укупно $\mathcal{M}_\mathrm{m} = Ia^2B\,\sin\phi$ $\boxed{\textbf{4п}}$.

Независно од избора начина којим се дошло до $\mathcal{M}_\mathrm{m}$, механичка снага се одређује као производ спрега и одговарајуће угаоне брзине, $P = \mathcal{M}_\mathrm{m}\,\omega$ $\boxed{\textbf{2п}}$, па се заменом добија $P = \omega a^2IB\sin(\phi) = 200\,\mathrm{mW}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

(б) Вискозна сила која се противи кретању ваљка може се одредити помоћу Њутновог закона вискозности примењеног на делић омотача ваљка угаоне ширине $\mathrm{d}\varphi$, тј. $\mathrm{d}F_\mathrm{v} = -\eta\dfrac{\Delta v}{\Delta r}\mathrm{d}S$ $\boxed{\textbf{1п}}$, где је $\dfrac{\Delta v}{\Delta r}$ градијент брзине у радијалном смеру, а $\mathrm{d}S = hr\mathrm{d}\varphi$ површина посматраног ламинарног слоја, којих укупно има $2\pi/\mathrm{d}\varphi$. По услову задатка, градијент брзине може се сматрати константним, па је $\dfrac{\Delta v}{\Delta r} = \dfrac{v(r+\delta)-v(r)}{\delta} = -\dfrac{\omega r}{\delta}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Заменом у израз за вискозну силу, $\mathrm{d}F_\mathrm{v} = \dfrac{\eta\omega hr^2}{\delta}\mathrm{d}\varphi$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Укупан момент вискозних сила које делују на ваљак је онда $\mathcal{M}_\mathrm{v} = \dfrac{2\pi}{\mathrm{d}\varphi}r\mathrm{d}F_\mathrm{v} = \dfrac{2\pi\eta\omega hr^3}{\delta}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. У устаљеном режиму постоји равнотежа погонског момента мотора и отпорног момента ваљка, $\mathcal{M}_\mathrm{m} = \mathcal{M}_\mathrm{v}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, одакле се решавањем по коефицијенту вискозности добија $\eta = \dfrac{\delta\mathcal{M}_\mathrm{m}}{2\pi\omega hr^3} = \dfrac{\delta Ia^2B\sin\phi}{2\pi\omega hr^3} \approx 10^{-3}\,\mathrm{Pa\cdot s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$.

**5.** Површинска густина електричне струје у тачки удаљеној $r$ од места удара износи $j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$, јер се укупна струја изотропно простире кроз полусферну површину испод подлоге $\boxed{\textbf{4п}}$. Из Омовог закона у локалном облику, на полусфери радијуса $r$, одређује се јачина електричног поља као $E(r) = \rho j(r) = \dfrac{\rho I}{2\pi r^2}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Пошто је електрично поље тачкастог наелектрисања $E(r) = \dfrac{Q_\mathrm{ekv}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, структура електричног поља услед удара муње иста је као она која потиче од еквивалентног тачкастог наелектрисања $Q_\mathrm{ekv} = 2\rho\varepsilon_0 I$, па је потенцијал у земљишту $\varphi(r) = \dfrac{Q_\mathrm{ekv}}{4\pi\varepsilon_0 r} = \dfrac{\rho I}{2\pi r}$, ослањајући се на аналогију са електричним пољем које потиче од позитивног тачкастог наелектрисања позиционираног у епицентру удара $\boxed{\textbf{3п}}$. Разлика потенцијала између предњих и задњих шапа пса размакнутих на растојању $d$ износи $U = \varphi(r) - \varphi(r+d) = \dfrac{\rho I}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r+d}\right)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Комбиновањем разломака добијамо $U = \dfrac{\rho Id}{2\pi r(r+d)}$, што омогућава постављање услова безбедности: $U \le U_\mathrm{kr}$, односно $\dfrac{\rho Id}{2\pi r(r+d)} \le U_\mathrm{kr}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Напослетку се добија квадратна неједначина по $r$: $r^2 + rd - \dfrac{\rho Id}{2\pi U_\mathrm{kr}} \ge 0$, те следи услов да је $r \ge r_\mathrm{kr}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Критично растојање $r_\mathrm{kr}$ представља позитивно (физички смислено) решење одговарајуће квадратне једначине, тј. $r_\mathrm{kr} = \left(\sqrt{1 + \dfrac{2\rho I}{\pi dU_\mathrm{kr}}} - 1\right)\dfrac{d}{2}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Уврштавањем бројних вредности добијамо да је $r_\mathrm{kr} \approx 39{,}40\,\mathrm{m}$, па се пас мора наћи на растојању $r \ge 40\,\mathrm{m}$ да би остао безбедан $\boxed{\textbf{2п}}$.

*<u>Напомена</u>*: обавезно признати све бодове ако је такмичар претпоставио да је $E(r)$ приближно константно у распону између $r_\mathrm{kr}$ и $r_\mathrm{kr} + d$, па је природно узети да је $U_\mathrm{kr} \approx E(r_\mathrm{kr})d$, те је $r_\mathrm{kr} \approx \sqrt{\dfrac{\rho Id}{2\pi U_\mathrm{kr}}} \approx 39{,}89\,\mathrm{m}$, што опет доводи до идентичног услова безбедности: $r \ge 40\,\mathrm{m}$.

Задатке припремили: *Данило Ђокић*, Електротехнички факултет, Београд; *Јанко Поповић*, Тринити колеџ, Кембриџ.
Рецензенти: *др Дејан Ђокић*, Институт за физику у Београду; *проф. др Ненад Стевановић*, ПМФ Крагујевац.
Председник комисије: *проф. др Имре Гут*, Департман за физику, Нови Сад.