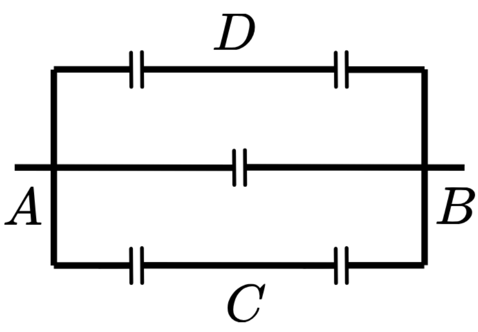
1. (a1) Капацитет почетног кондензатора износи $C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{ab}{d}$, док је капацитет кондензатора након окретања једне плоче једнак $C_2 = \varepsilon_0 \dfrac{a^2}{d}$. Како је напон константан, укупно наелектрисање које протекне кроз извор налазимо као $\Delta Q = \epsilon(C_2 - C_1) = \epsilon\varepsilon_0 \dfrac{a(a-b)}{d}$.

   (a2) Рад који извор врши једнак је $\epsilon\Delta Q = \varepsilon_0\epsilon^2 \dfrac{a(a-b)}{d}$. Енергија електричног поља унутар кондензатора је дата као $W = \dfrac{CU^2}{2}$, те је промена исте $\Delta W = \dfrac{(C_2 - C_1)\epsilon^2}{2} = \epsilon_0\epsilon^2 \dfrac{a(a-b)}{2d}$. Приметите да постоји дисбаланс између промене енергије кондензатора и рада извора.

   (б) Ако темена означимо словима као у задатку, а доведемо напон U између темена A и B, примећујемо да је, из симетрије, кондензатор између тачака C и D на нултом напону. Стога, еквивалентно коло кондензатора можемо саставити као на слици 1. Еквиваленти капацитет редне везе два кондензатора капацитета C износи $\dfrac{C}{2}$, те је коначни капацитет једнак $C + \dfrac{C}{2} + \dfrac{C}{2} = 2C$.



Слика 1: слика уз решење дела 1(б).

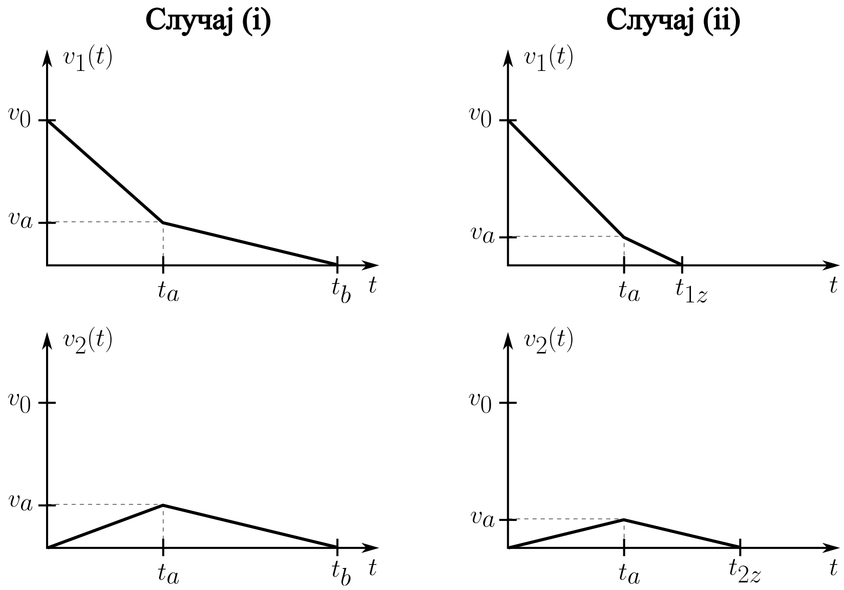
2. Вертикална компонента силе реакције подлоге на прву даску је по интензитету једнака $N_1 = 2mg$, а вертикална компонента силе реакције између дасака је по интензитету $N_2 = mg$. Након што се првој даски саопшти брзина v_0, на њу делују следеће две силе трења. Сила трења са подлогом F_1 усмерена је у негативном смеру x-осе јер је релативна брзина даске у односу на подлогу усмерена у позитивном смеру x-осе. Сила трења са другом даском F_2 усмерена је такође у негативном смеру x-осе јер је релативна брзина даске 1 у односу на даску 2 усмерена у позитивном смеру x-осе. С друге стране, на даску 2, по закону акције и реакције, делује сила F_2 која је усмерена у позитивном смеру x-осе. Једначине кретања дасака тада су: $ma_1 = -F_1 - F_2$, $ma_2 = F_2$, $F_1 = \mu_1 N_1$, $F_2 = \mu_2 N_2$. Из ових једначина налазимо $a_1 = -(2\mu_1 + \mu_2)g$ и $a_2 = \mu_2 g$.

   Овај режим кретања ће трајати док се брзине дасака не изједначе. Зависност брзине прве даске од времена је $v_1(t) = v_0 + a_1 t$, а друге је $v_2(t) = a_2 t$. Ове брзине се изједначавају у тренутку $t_a = \frac{v_0}{2(\mu_1+\mu_2)g}$ [$t_a = 1{,}00\,\mathrm{s}$ у оба случаја (i) и (ii)]. Тада је $v_1(t_a) = v_2(t_a) = \frac{v_0\mu_2}{2(\mu_1+\mu_2)} = v_a$ [$v_a = 0{,}294\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ у случају (i), односно $v_a = 0{,}196\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ у случају (ii)]. Рад који је извршила сила трења над даском 2 током прве секунде кретања је једнак кинетичкој енергији те даске у том тренутку $A = \frac{1}{2}mv_a^2$, односно $A = \frac{mv_0^2\mu_2^2}{8(\mu_1+\mu_2)^2}$. У случају (i) је $A = 152\,\mathrm{mJ}$, а у случају (ii) је $A = 67{,}4\,\mathrm{mJ}$.

   Након овог тренутка постоје две могућности за даље кретање дасака: да се даске крећу као целина једнаким брзинама или да даска 2 настави да проклизава по даски 1.

   У првом од поменутих случајева једначине кретања дасака су $ma_1 = -F_1 + F_2$, $ma_2 = -F_2$, при чему је $a_1 = a_2$, $F_1 = \mu_1 N_1$ и потребно је да сила трења мировања F_2 испуњава услов $F_2 \leq \mu_2 N_2$. Из претходних једначина налазимо $a_1 = a_2 = -\mu_1 g$, $F_2 = \mu_1 mg$, па се овај случај дешава кад је $\mu_1 \leq \mu_2$, односно у питању је случај (i) из текста задатка. Зависност брзина дасака од времена је тад $v_1(t) = v_2(t) = v_a - \mu_1 g(t - t_a)$ и даске се заустављају у тренутку $t_b = t_a + \frac{v_a}{\mu_1 g} = \frac{v_0}{2\mu_1 g}$ ($t_b = 2{,}50\,\mathrm{s}$).

У другом случају даска 2 проклизава по дасци 1 при чему је $v_2 \geq v_1$. Једначине кретања дасака тада су $ma_1 = -F_1 + F_2$, $ma_2 = -F_2$, $F_1 = \mu_1 N_1$, $F_2 = \mu_2 N_2$. Из ових једначина налазимо $a_1 = (\mu_2 - 2\mu_1)g$, $a_2 = -\mu_2 g$. Зависност брзина дасака од времена је тад $v_1(t) = v_a + (\mu_2 - 2\mu_1)g(t - t_a)$ и $v_2(t) = v_a - \mu_2 g(t - t_a)$. Пошто су почетне брзине исте, услов $v_2 > v_1$ је еквивалентан са $|a_1| > |a_2|$, одакле се добија $\mu_1 > \mu_2$, односно у питању је случај (ii) из текста задатка. Пошто је $|a_1| > |a_2|$, прва ће се зауставити даска 1 и то у тренутку $t_{1z} = t_a + \frac{v_a}{(2\mu_1 - \mu_2)g} = \frac{v_0 \mu_1}{g(\mu_1 + \mu_2)(2\mu_1 - \mu_2)}$ ($t_{1z} = 1{,}50\,\mathrm{s}$). Након тог тренутка се не мења једначина кретања за даску 2, тако да се даска 2 зауставља у тренутку $t_{2z} = t_a + \frac{v_a}{\mu_2 g} = \frac{v_0}{g(\mu_1 + \mu_2)}$ ($t_{2z} = 2{,}00\,\mathrm{s}$). Тражени графици су приказани на слици 2, при чему су све величине на графицима претходно дефинисане у тексту задатка или решењу.



Слика 2: график зависности брзине дасака од времена у два случаја.

3. (а) Потенцијална енергија интеракције пете куглице са учвршћеним куглицама кад се куглица налази у тачки А је $U_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a/2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a\sqrt{5}/2}$. Та енергија у тачки D је $U_D = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a/2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a\sqrt{5}/2}$. Из закона одржања енергије је $U_A = \frac{1}{2}mv^2 + U_D$, где је v брзина куглице у тачки D. Одатле налазимо $v = 2q\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{5}}{\pi\varepsilon_0 ma}}$, односно $v \approx 0{,}839\sqrt{\frac{q^2}{m\varepsilon_0 a}}$.

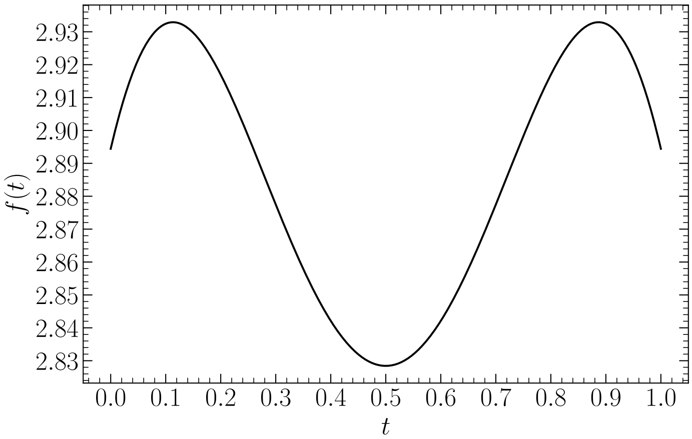
(б) Кад се наелектрисања q_1, q_2, q_3 и q_4 повећају три пута, потенцијална енергија у тачкама А и D ће се такође повећати три пута, па ће се, због закона одржања енергије, толико пута повећати и кинетичка енергија куглице у тачки D. Следи да ће се брзина куглице у некој тачки повећати $\sqrt{3}$ пута у односу на претходни случај. Тиме ће се време које је потребно да куглица стигне из тачке А у тачку D смањити $\sqrt{3}$ пута, односно биће једнако $t' = t/\sqrt{3}$.

(в) Потенцијална енергија интеракције честице наелектрисања q на дужи AD са наелектрисањима q_1, q_2, q_3 и q_4 је једнака

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q^2}{\sqrt{x^2 + (a/2)^2}} + \frac{2q^2}{\sqrt{(x-a)^2 + (a/2)^2}}\right),$$

где је x растојање од тачке А. Овај израз се може преписати у облику $U = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a} f\left(\frac{x}{a}\right)$, где је $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{(1-t)^2 + \frac{1}{4}}}$. Цртањем графика функције $f(t)$ (слика 3), видимо да она има минимум за $t_1 = 0{,}5$ који је једнак $f(t_1) = 2{,}8284$. Та функција има максимум за $t_2 = 0{,}1133$ који је једнак $f(t_2) = 2{,}9329$ и максимум за $t_3 = 0{,}8867$ који је једнак $f(t_3) = 2{,}9329$. Важи и $f(0{,}75) = 2{,}8983$ и $f(0) = f(1) = 2{,}8944$.

(i) Да би тело стигло из B у C потребно је да његова кинетичка енергија у тачки B буде $T = U_C - U_B$. Одатле следи $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}[f(0{,}75) - f(0{,}5)]$, односно $v \approx 0{,}149\sqrt{\frac{q^2}{m\varepsilon_0 a}}$.
(ii) Да би тело стигло из B у D, довољно је да стигне до тачке са координатом $\frac{x}{a} = t_3$ где потенцијална енергија има максимум. Одатле следи $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}[f(t_3) - f(0{,}5)]$, односно $v \approx 0{,}182\sqrt{\frac{q^2}{m\varepsilon_0 a}}$.
(iii) Да би тело стигло из A у B, довољно је да стигне до тачке са координатом $\frac{x}{a} = t_2$ где потенцијална енергија има максимум. Одатле следи $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}[f(t_2) - f(0)]$, односно $v \approx 0{,}111\sqrt{\frac{q^2}{m\varepsilon_0 a}}$.



Слика 3: график функције $f(t)$.

4. (а) Закон одржања енергије планете даје нам $\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = E = const$, што се може записати у линеаризованом облику $v^2 = \frac{2GM}{r} + \frac{2E}{m}$, где y-оси одговара v^2, x-оси одговара $\frac{1}{r}$, коефицијент правца је $k = 2GM$, а одсечак на y-оси је $n = \frac{2E}{m}$. Положај планете добијамо из $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$, а брзину добијамо апроксимативно, као $v_i = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} = \frac{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}}{\tau}$.

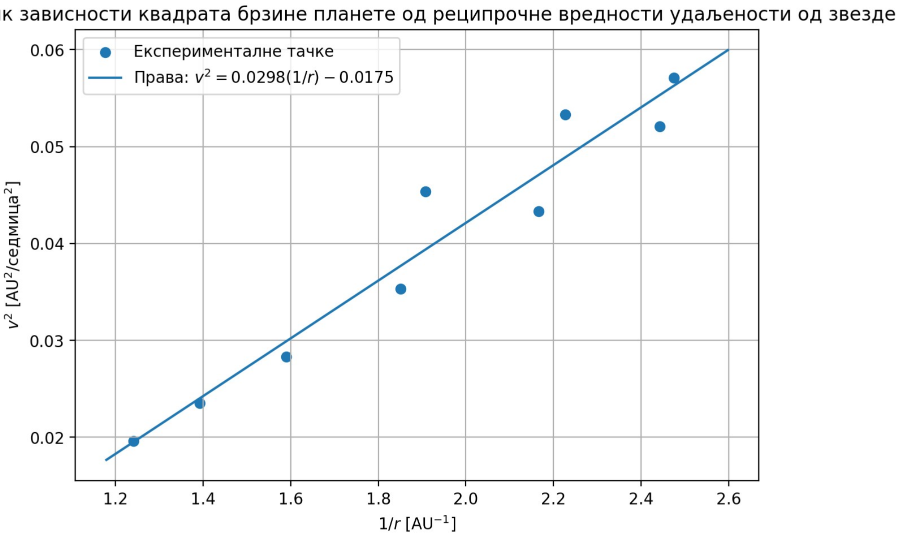
Положај	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x [AU]	0,447	0,445	0,372	0,222	0,026	-0,176	-0,364	-0,530	-0,676	-0,803
y [AU]	-0,274	-0,061	0,158	0,344	0,461	0,511	0,513	0,485	0,438	0,379
r [AU]	0,524	0,449	0,404	0,409	0,462	0,541	0,629	0,718	0,806	0,888
$1/r$ [AU^{-1}]	1,91	2,23	2,47	2,44	2,17	1,85	1,59	1,39	1,24	1,13
v [10^{-1} AU/седмица]	2,13	2,31	2,39	2,28	2,08	1,88	1,68	1,53	1,40	–
v^2 [10^{-2} AU^2/седмица^2]	4,54	5,33	5,71	5,21	4,33	3,53	2,83	2,35	1,96	–

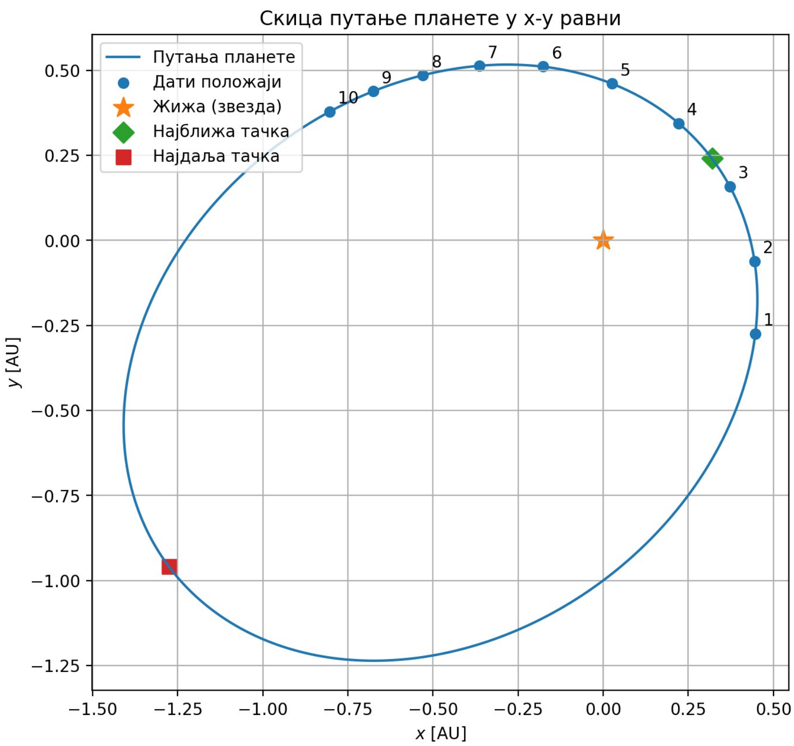
Са графика се добија да је коефицијент правца $k \approx 2{,}98 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{AU}^3/\text{седмица}^2 \approx 2{,}75 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$. Одатле је $M = \frac{k}{2G} \approx 2{,}06 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

(б) Из трећег Кеплеровог закона $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ следи да је $a = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} \approx 1{,}00\,\mathrm{AU}$. Други приступ би био решавање система једначина који се добија писањем закона одржања енергије и закона одржања момента импулса за тачке путање најближе и најдаље од звезде, и коришћењем $r_{min} + r_{max} = 2a$, где се за r_{min} може узети минимално растојање r из табеле.

(в) По другом Кеплеровом закону је $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S}{T} = \frac{ab\pi}{T}$. Одатле се добија $b = \frac{\Delta S}{a\pi} \cdot \frac{T}{\Delta t} \approx 0{,}80\,\mathrm{AU}$, где је период T познат, a је израчунато у делу под (в), ΔS се може добити уцртавањем положаја планете на милиметарски папир и процењивањем површине коју вектор положаја планете пребрише између два положаја, а Δt колико је времена било потребно за то. На пример, за положаје између положаја 1 и 10 протекне $\Delta t = 9$ недеља.

(г) Најлакше је положај тачака проценити цртањем већ познатих положаја на милиметарском папиру. Најближа тачка налази се између положаја 3 и 4, док се положај најдаље може добити тражењем тачке на правој која спаја најближи положај и координатни почетак и удаљена је $2a$ од најближег положаја. Координате најближег положаја су приближно $(0{,}32\,\mathrm{AU}; 0{,}24\,\mathrm{AU})$, а најдаљег $(-1{,}28\,\mathrm{AU}; -0{,}96\,\mathrm{AU})$.





Задатке припремили: *др Душан Ђорђевић* (1), Физички факултет у Београду, *др Ненад Вукмировић* (2, 3), Институт за физику у Београду, *Јанко Поповић* (4), Тринити колеџ, Кембриџ
Рецензенти: *Јован Потребић* (1), *др Душан Ђорђевић* (3), *Огњен Јанковић* (4), Физички факултет у Београду, *др Дејан Ђокић* (2), Институт за физику у Београду, *Вукашин Бабић* (4), Електротехнички факултет у Београду
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, Природно-математички факултет у Новом Саду