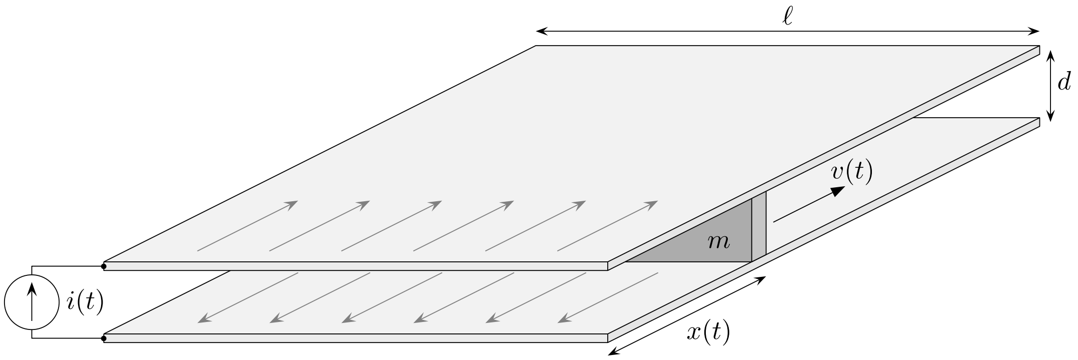
Задатак 1: електромагнетни лансер (10 поена)

На слици је скициран један прототип суперпроводног електромагнетног лансера, топа на индуктивни погон, који уз помоћ променљивих струја може да избаци пројектиле са екстремно великим брзинама, и то без употребе хемијски реактивних средстава. Према једном крајње упрошћеном моделу, лансер се састоји од две глатке танке суперпроводне плоче у вакууму, свака огромне дужине ℓ и бесконачне ширине, које су размакнуте на растојању $d \ll \ell$. Између плоча, по њиховој дужини, уметнута је глатка суперпроводна шина, масе m, дужине ℓ и висине d, но занемарљиве ширине. Шина може да се креће без трења дуж правца ширине плоча. Плоче су повезане на идеални струјни извор напајања чија јачина електричне струје $i(t)$ може по потреби да се мења у времену, што доводи до померања суперпроводне шине у смеру приказаном на слици. Нека се шина у неком тренутку t од почетка кретања нашла у временски-растућем положају $x(t)$. Њен почетни положај је био далеко већи од растојања d. Електрична струја се равномерно распоређује по дужини плоча и затвара се преко суперпроводне шине, протичући паралелно правцу ширине. Тако се само унутар ове струјне циркулације формира хомогено магнетно поље, као у случају идеалне завојнице, у чијој индукцији превасходно доминирају доприноси од протицања електричне струје по површима суперпроводних плоча, површина $\ell \times x(t)$. Магнетна пермеабилност вакуума је позната и износи μ_0, док се гравитациони и капацитивни ефекти занемарују у систему.



(а) У функцији од ℓ, $x(t)$, d, и $i(t)$ одредити тренутну вредност запреминске густине магнетне енергије $w_{\mathrm{m}}(t)$ тренутно формираног магнетног поља, као и тренутну вредност коефицијента самоиндукције $L(t)$ за геометрију која обухвата ово хомогено магнетно поље у унутрашњости лансера. **(4 поена)**

(б) Посматрајмо један случај када је струја извора стална $i(t) = I$ (величина I није задата) и када струјни извор развија снагу која се линеарно мења у времену t по закону $P(t) = P_0\,(1 + t/\tau)$, где су P_0 и τ познате позитивне константе. Покажите да се у сваком тренутку t тачно половина уложене снаге $P(t)$ струјног извора троши на брзину промене енергије хомогеног магнетног поља и одредите закон по којем се мења тренутна брзина суперпроводне шине $v(t)$, као и вредност јачине електричне струје I. **(3,5 поена)**

(в) Ако од почетног тренутка $t = 0$ па до тренутка $t = t_1$ извор уложи рад $4P_0\tau$, одредити бројну вредност за t_1, као и за брзину v_1 коју шина има у тренутку t_1. Познате су нумеричке вредности $P_0 = 100$ W, $\tau = 1$ s и $m = 1$ kg. **(0,5 поена)**

(г) Посматрајмо други случај када се струја извора линеарно мења у времену по закону $i(t) = (I_0/T)\,t$, где су I_0 и T познате позитивне константе. Снага извора је и даље променљива, али сада на непознат начин. У овом случају одредите закон по којем се мења тренутно убрзање $a(t)$ које шина задобија током времена.

(2 поена)

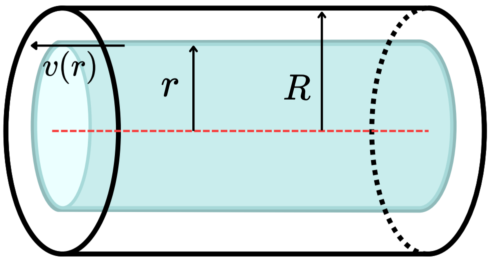
Задатак 2: вискозни ток флуида (10 поена)

У овом задатку проучаваћемо проток вискозног флуида кроз уску цев, као и примену ове поставке у различитим феноменима. Од интереса ће нам бити такозвани њутновски флуиди са ламинарним током (током по слојевима) у којима је сила вискозности $\vec{F}_{\rm vis}$, која делује по површини S флуида на положају y чији се танак слој дебљине dy креће брзином $\vec{v}(y)$, дата изразом

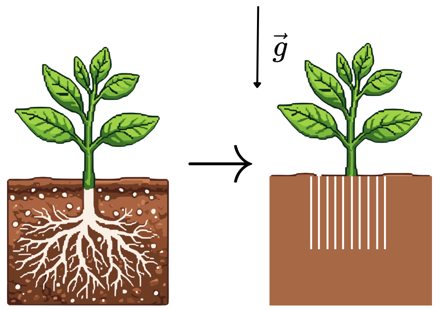
$$\vec{F}_{\rm vis} = \eta S \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}y}\,, \tag{1}$$

где је η коефицијент вискозности. Слојеви се крећу дуж правца који је нормалан на y-осу. Вискозни флуиди играју велику улогу у разним појавама које срећемо у свету око нас. У овом задатку, ток флуида увек сматрати ламинарним.

Део I: Поазејев закон. Посматрати цилиндар радијуса R и дужине ℓ у којем се успоставља ламинарни проток воде. Издвојите мањи цилиндар радијуса r и нека је са $v(r)$ означен интензитет брзине танког слоја флуида на површини тог цилиндра, видети слику 1. На крајевима цилиндричне, хоризонталне цеви, постоји разлика притиска $\Delta P > 0$, при чему притисак опада дуж тока флуида.



Слика 1: слика уз део I.



Слика 2: слика уз део II.

(а) Користећи једначину (1), наћи израз за $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ у функцији од η, ℓ, ΔP и r. **(0,5 поена)**

(б) Одредити зависност $v(r)$ преко познатих параметара η, ℓ, ΔP и R, под претпоставком да је брзина флуида непосредно уз цев једнака нули. Наћи укупан масени проток флуида Q кроз цев и показати да важи: $Q = \dfrac{\alpha}{\ell} R^4 \Delta P$, где константу пропорционалности α треба одредити у функцији од η и густине флуида ρ.

(1 поен)

Напомена: уколико нисте урадили део под (б)*, можете сматрати да вам је константа α позната, а њену вредност за воду узети као $\alpha^* = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{s/m^2}$, при чему дата нумеричка вредност тенденциозно не одговара стварним табеларним подацима.*

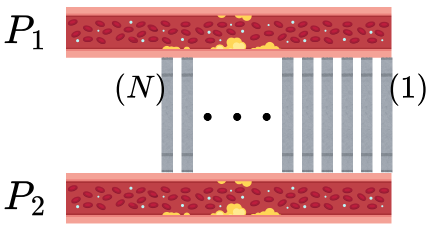
Део II: примена у живим организмима. Применимо стечено знање на модел биљке која узима воду из земљишта преко корена. Претпоставити да је ток воде у корену описан сличном једначином као у делу (а), при чему је потребно урачунати и дејство гравитационе силе. Сваки корен је вертикалан (видети слику 2) и ефективно се понаша као цев дужине $\ell = 5$ cm и полупречника $R_{\rm ef} = \dfrac{8}{100} \times 0{,}2$ mm (стварни полупречник једног корена је 0,2 mm, но вода не тече по целом попречном пресеку, што је урачунато фактором $\dfrac{8}{100}$). Вода из земљишта улази у корен на самом крају истог. Густина воде $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, коефицијент вискозноси воде $\eta = 1\ \mathrm{mPa\cdot s}$ и гравитационо убрзање $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ су познати.

(в) Одредити аналитички израз, као и бројну вредност за разлику притисака која мора постојати између земљишта и дна стабљике биљке, да би се системом од $N = 10$ коренова као на слици транспортовала вода, тако да током једног дана константним током биљка прими запремину од 20 mℓ воде. **(1 поен)**

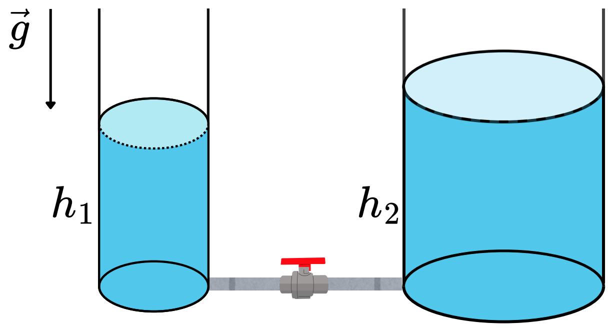
Поазејев закон се може користити и за разумевање тока крви кроз људски организам. Крвни суд се може моделовати као права, хоризонтална (стога гравитација не игра никакву улогу), еластична цев кроз коју тече флуид. Притисак $P(z)$ опада са растућом координатом z, која мери растојање посматраног попречног пресека од једног краја крвног суда. Крв сматрати нестишљивим њутновским флуидом коефицијента вискозности η_k и густине ρ_k. Претпоставити да се Поазејев закон може применити локално, односно да за масени проток флуида кроз неки попречни пресек важи $Q = -\alpha_\mathrm{k} r^4(z)\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}$. Сматрати да је позната релација између површине попречног пресека крвног суда A (сматрати да је попречни пресек увек кружница) и разлике притисака унутар суда $P(z)$ и притиска изван суда P_o, дата као $A(P, P_o) = A_0(1 + K(P(z) - P_o))$, где су K и A_0 познате константе одговарајућих димензија.

(г) Ако је притисак на једном крају суда дат као $P(z_1) = P_1$, а притисак на другом једнак $P(z_2) = P_2$, одредити масени проток крви кроз крвни суд у функцији од P_o, A_0, K, α_k, ρ_k, P_1, P_2 и дужине крвног суда $L = z_2 - z_1$. **(1,5 поен)**

(д) Крвни систем се састоји од мреже крвних судова. На слици 3 је дат поједностављен модел крвног система једне јединке. Два крвна суда, која завршавају у срцу јединке где постоји разлика притисака $P_1 - P_2$, великог попречног пресека спојена су са N крвних судова веома малог попречног пресека и чине целокупан крвоток посматране јединке. Ако је познато да кроз један мали крвни суд означен бројем (1) постоји масени проток Q, одредити укупан проток крви кроз организам ове јединке. Образложити одговор. **(0,5 поена)**



Слика 3: слика уз део (д).



Слика 4: слика уз део III.

Део III: две посуде. Две цилиндричне посуде, полупречника основе r_1 и r_2 спојене су уском цеви дужине l константног полупречника $r \ll r_1, r_2$ на дну. У почетном тренутку, лева посуда је напуњена водом до висине h_1, док је десна напуњена водом до висине h_2 (претпоставити $h_1 < h_2$), а вентил који се налази на уској цеви је затворен тако да онемогућава проток воде (видети слику 4). У неком тренутку, вентил се отвори. Кретање воде кроз уску цев уноси дисипацију у систем преко силе вискозности. У деловима (ђ)-(з) сматрати да се непосредно након отварања вентила успоставља квазистационарни проток воде у ком можемо применити Поазејев закон за проток воде кроз хоризонталну цев, на чијим крајевима је присутна разлика притисака која потиче искључиво од хидростатичког притиска. Претпоставити да је, у истим деловима задатка, ток све време квазистационаран, као и да је позната константа α за воду из дела (б), као и густина воде ρ.

(ђ) Одредити снагу топлотних губитака услед дисипације непосредно након отварања вентила, у функцији од α, ρ, h_1, h_2, r, l и g. Претпоставити да топлотни губици настају услед рада силе вискозности. **(2 поена)**

(е) Одредити укупну енергију која је ослобођена првих T секунди услед ове дисипације у функцији од α, ρ, h_1, h_2, r, r_1, r_2, l и g. **(1 поен)** (ж) У функцији од ρ, g, r_1, r_2, h_1 и h_2, директним рачуном одредити прираштај укупне гравитационе потенцијалне енергије система на уштрб које је дошло до дисипације од почетног тренутка до тренутка када се (после довољно дуго времена) систем заустави у равнотежном стању. **(1 поен)**

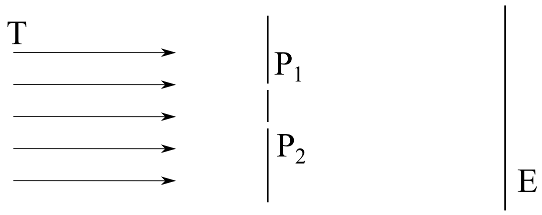
(з) Модел који сте анализирали се може представити као еквивалентно RC коло, при чему ефективну електричну отпорност можемо изразити као $R = \dfrac{\pi^2 l\rho}{\alpha r^4}\dfrac{r_1^4 r_2^4}{(r_1^2+r_2^2)^2}$. Наћи израз за ефективни капацитет C у функцији од r_1, r_2, ρ и g. **(0,5 поена)**

(и) Ако бисмо анализирали сасвим другачију ситуацију, у којој вискозност одсуствује, а полупречник цеви која спаја две посуде је r, при чему узимамо $r_1 = r_2 = r$, еквивалентно електрично коло би било LC коло. Одредити израз за еквивалентно L у функцији од l, h_1, h_2 ρ и r, а такође одредити и период хармонијских осцилација овог система у функцији од l, h_1, h_2 и g. Прелаз између различитих цеви је континуиран. **(1 поен)**

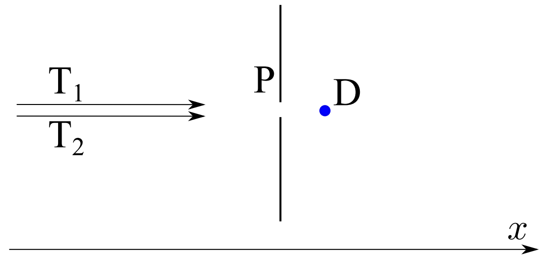
Задатак 3: временска интерференција (10 поена)

У класичном Јанговом огледу (слика 5) електромагнетни талас Т пролази кроз два просторно раздвојена процепа P_1 и P_2, на којима се дифракција услед ширине отвора занемарује. До једне тачке на екрану Е стижу два таласна доприноса различитих фаза, па се на екрану региструју светле и тамне пруге. За настанак интерференције, међутим, није суштински важно да два таласа буду раздвојена у простору. Довољно је да постоји фазна разлика која може бити узрокована временским кашњењем.

У овом задатку разматрамо временску аналогију Јанговог огледа. Уместо два просторно раздвојена процепа, на један процеп Р доспевају два монохроматска раванска електромагнетна таласа T_1 и T_2 (слика 6) поларизована у истој равни, кружне фреквенције ω, креирана на истом месту без почетне фазе, али у различитим временским тренуцима. Зависност алгебарских вредности електричног поља сваког од та два таласа од времена на месту генерисања је дата изразом $E_i(t) = A_0 \cos[\omega(t - t_i)]$, за $i = 1, 2$, где је $t_1 = -\tau/2$ и $t_2 = \tau/2$ и $\tau > 0$. Таласи се простиру у правцу $x-$осе која је нормална на процеп. Детектор D који мери интензитет таласа је постављен непосредно након проласка кроз процеп.



Слика 5: Јангов оглед.



Слика 6: оглед са временском интерференцијом.

(а) Одредити фазну разлику два таласа на месту детекције. Резултат изразити у зависности од датих величина ω и τ. **(0,5 поена)**

(б) Одредити зависност интензитета који мери детектор од кружне фреквенције таласа, прецизније одредити величину $\dfrac{I(\omega)}{I_{\max}}$ где је $I(\omega)$ интензитет који мери детектор при кружној фреквенцији извора ω, а $I_{\max}$ је максимална вредност тог интензитета у интервалу $\omega \in (0,\infty)$. Резултат изразити у зависности од датих величина ω и τ. **(1 поен)**

(в) Одредити фреквенције при којима је интензитет максималан и минималан, као и фреквентни размак између два суседна максимума. Резултате изразити у зависности од τ. Како би се из измереног спектра $I(\omega)$ могао одредити временски помак τ? **(0,5 поена)**

(г) Објаснити физичку аналогију између обичног Јанговог огледа и временског огледа разматраног у овом задатку. Зашто се код обичног Јанговог огледа интерференционе штрафте јављају као просторна слика на екрану, док се код временског огледа јављају минимуми и максимуми у спектру, тј. као зависност интензитета од учестаности ω? Која величина у временском огледу игра улогу аналогона положаја тачке на екрану у класичном Јанговом огледу? **(0,5 поена)**

(д) Претпоставимо сада да два таласа немају исте амплитуде. Нека је интензитет који би мерио детектор ако постоји само први талас I_1, а ако постоји само други талас I_2. Одредити интензитет који мери детектор када су присутна оба таласа. Резултат изразити у зависности од I_1, I_2, ω и τ. Затим одредити видљивост интерференционих екстремума $\nu = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$, где су $I_{\max}$ и $I_{\min}$ редом максимална и минимална вредност интензитета у интервалу $\omega \in (0,\infty)$. Чему је једнако ν у случајевима $I_1 = I_2$ и $I_1 \ll I_2$? **(2 поена)**

(ђ) У овом делу задатка ћемо додатно претпоставити да таласи нису монохроматски већ да садрже у свом спектру кружне фреквенце из уског интервала $(\omega - \delta\omega/2, \omega + \delta\omega/2)$ при чему је амплитуда једног таласа иста за сваку фреквенцу. Сматрати да детектор мери алгебарски усредњени интензитет по свим фреквенцама из датог интервала. Чему је једнака видљивост ν у овом случају? Резултат изразити у зависности од величина I_1, I_2, ω, $\delta\omega$ и τ. Проверити да се добијени резултат слаже са резултатом из претходног дела задатка кад је $\delta\omega \cdot \tau \ll 1$. **(1,5 поена)**

(е) На видљивост ν утиче и појава декохеренције. До декохеренције долази јер фазна разлика два разматрана таласа није константа већ се мења током времена (флуктуира). Флуктуације фазе су описане Гаусовом расподелом. Прецизније, то значи следеће. Нека је z одступање фазе од њене средње вредности у неком тренутку. Тада је вероватноћа да је z у уском интервалу $(z, z + \mathrm{d}z)$ једнака $g(z)\mathrm{d}z$, где је $g(z) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$. У овом делу задатка разматрати случај из дела задатка (д) при чему је додата појава декохеренције. Сматрати да детектор мери усредњену вредност интензитета током времена које је много веће од једног периода таласа. Одредити видљивост ν у овом случају. Резултат изразити у зависности од I_1, I_2, ω, τ и σ. **(2 поена)**

(ж) У овом делу задатка уместо два таласа, размотрићемо N таласа чија је зависност електричног поља од времена на месту генерисања дата изразом $E_k(t) = A\cos\left[\omega(t - t_k)\right]$, за $k = 0, 1, \ldots, N-1$, где је $t_k = k \cdot \tau$. Одредити спектралну зависност интензитета $\dfrac{I(\omega)}{I_{\max}}$ [при чему ове величине имају исто значење као у делу задатка (б)] и положаје главних максимума. Резултат изразити у зависности од величина N, ω и τ. Објаснити зашто са повећањем N максимуми постају ужи и оштрији у фреквентном домену. **(1,5 поена)**

(з) У делу задатка под (г) смо утврдили да оглед са временском интерференцијом из делова задатка (а)-(в) одговара класичном Јанговом огледу. Ком оптичком елементу одговара оглед са временском интерференцијом из дела (ж)? Одговор обавезно образложити. **(0,5 поена)**

Приликом решавања задатка могу вам бити корисни неки од следећих математичких идентитета:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(z) \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}z = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \cos(z_0)\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath z} \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}z = e^{\imath z_0 - \frac{\sigma^2}{2}}\,,$$

$$\cos(z) + \cos(z+a) + \cdots + \cos(z + (N-1)a) = \frac{\sin\left(\frac{Na}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \cos\left(z + \tfrac{(N-1)a}{2}\right),$$

$$e^{\imath z} + e^{\imath(z+a)} + \cdots + e^{\imath(z+(N-1)a)} = e^{\imath\left(z + \frac{(N-1)a}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{Na}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\;.$$

Задатке припремили: *др Дејан М. Ђокић* (1) , Институт за физику у Београду,
др Душан Ђорђевић (2) *и Милош Петрашиновић* (3), Физички факултет Универзитета у Београду.
Рецензенти: *др Душан Ђорђевић* (1) , Физички факултет Универзитета у Београду,
др Дејан М. Ђокић (2, 3) *и др Ненад Вукмировић* (3), Институт за физику у Београду.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, ПМФ Универзитета у Новом Саду.