Решење 1: електромагнетни лансер (10 поена)

(а) По услову задатка, струја се равномерно распоређује по дужини плоча, те обод по којем она циркулише можемо мисаоно изделити на огроман број ($N \to \infty$) навојака, којих по јединици дужине има N/ℓ, а кроз сваки протиче електрична струја јачине $i(t)/N$. Према томе, као у случају идеалне завојнице, тренутна вредност интензитета магнетне индукције хомогеног поља, које делује у смеру одређеном правилом десног завртња за дати смер циркулисања струје, износи $B(t) = \mu_0(N/\ell)(i(t)/N) = \mu_0 i(t)/\ell$, па је запреминска густина енергије поља које је омеђено суперпроводним плочама: $w_{\mathrm{m}}(t) = B^2(t)/2\mu_0 = (\mu_0/2\ell^2)\times i^2(t)$. Укупна тренутна вредност магнетне енергије овог поља је $w_{\mathrm{m}}(t)\times \ell x(t) d \equiv L(t)i^2(t)/2$, одакле налазимо да је $L(t) = \mu_0 x(t)d/\ell$. Алтернативно, можемо искористити Амперову теорему на правоугаону контуру која је паралелна шини и пресеца тачно једну од две суперпроводне плоче.

(б) Како је $x(t)$ растућа функција времена, то ће укупан сопствени флукс $\Phi_c(t) = L(t)i_c(t)$ по контури c да расте. Одабрана контура c се поклапа са циркулацијом струје, па је $i_c(t) = +i(t) > 0$. Како је читав систем шине и плоча суперпроводан, то се мора спречити појава укупног електричног поља у њему, што се уређује интервенцијом струјног извора који ће својим спољашњем напајањем преко напона $\mathcal{E}(t)$ компензовати индуковану електромоторну силу $\mathcal{E}^{(c)}_{\text{ind}}(t)$ услед промене флукса, па је $\mathcal{E}(t) + \mathcal{E}^{(c)}_{\text{ind}}(t) = 0$. Ослањајући се на Фарадејев закон електромагнетне индукције, $\mathcal{E}(t) - \dfrac{\mathrm{d}\Phi_c(t)}{\mathrm{d}t} = 0$, па је $\mathcal{E}(t) = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}i(t) + \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}L(t) = (\mu_0 I d/\ell)v(t) > 0$ (у смеру c). Тренутна снага извора је стога позитивна, дакле извор улаже енергију, па је $P(t) = I\mathcal{E}(t) = (\mu_0 I^2 d/\ell)v(t)$. Током неког екстремно кратког временског интервала $\mathrm{d}t$ извор ће уложити рад $\mathrm{d}A = P(t)\mathrm{d}t = (\mu_0 I^2 d/\ell)v(t)\mathrm{d}t = (\mu_0 I^2 d/\ell)\mathrm{d}x = \mathrm{d}LI^2 = 2\times\dfrac{1}{2}\left(L(x+\mathrm{d}x) - L(x)\right)I^2$, па се заиста у сваком тренутку тачно половина уложене снаге $P(t)$ струјног извора (за стално $i(t) = I$) троши на прираштај енергије хомогеног магнетног поља у јединици времена. С друге стране, постоји Амперова сила $F(t)$ којом магнетно поље $B(t)$ делује удаљавајући на суперпроводну шину кроз коју такође протиче струја $i(t)$ по висини d, па је $F(t) = \dfrac{1}{2}i(t)B(t)d = \dfrac{\mu_0 d I^2}{2\ell}$. Фактор $1/2$ долази од тога да се поље налази само са једне стране шине. Како је $F(t) = ma(t)$, а вучна сила константна, то је убрзање шине константно и важи да је $a = \dfrac{\mu_0 d I^2}{2m\ell}$, па је у општем случају $v(t) = v_0 + at$. По услову задатка $P(t) = P_0(1 + t/\tau)$, одакле се добија да је: $v_0 = \sqrt{\dfrac{P_0\tau}{2m}}$, $a = \sqrt{\dfrac{P_0}{2m\tau}}$, и $I = \sqrt[4]{\dfrac{2mP_0\ell^2}{\tau\mu_0^2 d^2}}$.

(в) У случају кад се од тренутка $t = 0$ уложи рад $4P_0\tau$ од стране извора, а пола оде на промену кинетичке енергије, тада је $2P_0\tau = mv_1^2/2 - mv_0^2/2$, одакле заменом налазимо да је $v_1 = 3v_0 = 3\sqrt{\dfrac{P_0\tau}{2m}} \approx 21{,}2\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ и $t_1 = (v_1 - v_0)/a = 2\tau = 2\ \mathrm{s}$.

(г) У другом случају, $i(t) = (I_0/T)t$, па је $a(t) = F(t)/m = \dfrac{\mu_0 d}{2m\ell}i^2(t) = \dfrac{\mu_0 d I_0^2}{2m\ell T^2}t^2$. Иначе, израз за вучну силу у општем случају гласи: $F(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}i^2(t)$, што се изводи као и раније из $\dfrac{1}{2}i(t)B(t)d$. Израз за $F(t)$ се може извести пажљивим разматрањем расподеле елементарног рада извора $i(t)\mathcal{E}(t)\mathrm{d}t = i^2(t)\mathrm{d}L + Li(t)\mathrm{d}i$ на елементарне прираштаје: (1) магнетне $\dfrac{\mathrm{d}(Li^2)}{2} = \dfrac{i^2(t)}{2}\mathrm{d}L + Li(t)\mathrm{d}i$ и (2) кинетичке енергије (тј. елементарног механичког рада $F(t)\mathrm{d}x = F(t)v(t)\mathrm{d}t$). У општем случају се $i(t)\mathcal{E}(t)\mathrm{d}t$ не распоређује по пола као у случају када је $i(t) = I$.

Решење 2: вискозни ток флуида (10 поена)

(а) Директном применом Њутновог закона вискозности на дату геометрију имамо $|\vec{F}_{\rm vis}| = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} 2r\pi\ell$. Да би ток био стационаран, ова сила се мора уравнотежити са $|\Delta P| r^2\pi$, те имамо $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{r\Delta P}{2\eta\ell}$, где знак минус указује да се интензитет брзине смањује приликом повећавања радијалне координате.

(б) Интеграљењем претходне диференцијалне једначине добијамо $v(r) = v_0 - \int_0^r \frac{r'\Delta P}{2\eta\ell}\,\mathrm{d}r' = v_0 - \frac{\Delta P}{4\eta\ell} r^2$. Из граничног услова $v(R) = 0$ налазимо $v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right)$. Стога, имамо $Q = \int_0^R 2r\pi \frac{\rho\Delta P}{4\eta\ell}\left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}r = \frac{\pi\rho}{8\eta\ell} R^4 \Delta P$, те је $\alpha = \frac{\pi\rho}{8\eta}$.

(в) Како је корење вертикално потребно је модификовати претходни израз додавањем хидростатичког притиска. Проток кроз један корен је један $Q_1 = \frac{\alpha}{\ell} R_{\rm ef}^4 (\Delta P - \rho g \ell)$. Кроз десет паралелно повезаних коренова, укупан проток је једнак $Q_{\rm tot} = 10 Q_1 = 10\frac{\alpha}{\ell} R_{\rm ef}^4 (\Delta P - \rho g\ell)$. Са друге стране, $Q_{\rm tot} = 20$ g/dan, одакле добијамо $\Delta P = \frac{8\eta Q_{\rm tot}\ell}{\pi N \rho R_{\rm ef}^4} + \rho g \ell = 45{,}5\,\mathrm{kPa}$. Притисак, наравно, мора бити већи у корену.

Напомена: Ако се користи вредност α^* из задатка, добија се вредност $\Delta P = \frac{Q_{\rm tot}\ell}{N\alpha^* R_{\rm ef}^4} + \rho g\ell = 90{,}4\,\mathrm{kPa}$.

(г) Проток крви кроз крвни суд је константан, одакле имамо $\alpha_k r^4 \frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{const} = -Q$. Како важи $r^2\pi = A_0(1 + K(P(z) - P_o))$, имамо $r = \sqrt{\frac{A_0}{\pi}(1 + K(P(z) - P_o))}$. Одавде добијамо $\frac{A_0^2}{\pi^2}(1 + K(P(z) - P_o))^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -Q/\alpha_k$. Решавањем ове диференцијалне једначине, уз граничне услове $P(0) = P_1$ и $P(L) = P_2$, долазимо до $Q = \frac{\alpha_k A_0^2}{3\pi^2 K L}\left[(1 + K(P_1 - P_o))^3 - (1 + K(P_2 - P_o))^3\right]$.

(д) Из услова задатка, можемо занемарити пад притиска у великом крвном суду у поређењу са падом притиска на крајевима малих крвних судова. Стога, кроз сваки мали крвни суд протиче приближно иста количина крви, те је укупан масени проток проток $Q_{\rm tot} = NQ$.

(ђ) Како је ток квазистационаран, можемо сматрати да се на крајевима хоризонталне цеви јавља разлика притисака која потиче од хидростатичког притиска $\Delta P = \rho g(h_2 - h_1)$ (приликом примене Бернулијеве једначине, кинетички чланови не играју улогу, а свакако су значајно мањи од кинетичког члана унутар хоризонталне цеви). Применом Поазејевог закона на хоризонталну цев, долазимо до $Q = \frac{\alpha r^4}{l}\rho g(h_2 - h_1)$. У нашој апроксимацији, вискозна сила је изједначена са силом која потиче од разлике притисака на крајевима цеви, која је једнака $\rho g(h_2 - h_1) r^2\pi$, апсолутну вредност рада вискозних сила (коју бисмо иначе пронашли интеграцијом рада на сваком танком цилиндру дебљине $\mathrm{d}r$) можемо наћи као $|\mathrm{d}A| = \rho g(h_2 - h_1)\frac{Q}{\rho}\mathrm{d}t$. На крају, долазимо до израза $\mathscr{P} = \frac{\alpha\rho g^2 (h_2 - h_1)^2 r^4}{l}$. Као одговор смо навели позитивну величину, уз подсећање да је у питању снага топлотних губитака, те се енергија ослобађа.

Напомена: очекивано је да ће неки такмичари резоновати слично следећем: „ *...$Q = \rho v r^2\pi$, где је v брзина флуида унутар хоризонталне цеви, те је $v = \frac{\alpha r^2 g(h_2 - h_1)}{\pi l}$. Снага топлотних губитака једнака је производу вискозне силе и брзине флуида v...*” Овакав резон не може донети све поене, јер није јасно шта брзина v представља и не образлаже зашто је тражени рад ненулти, иако је релативна брзина цеви и слоја флуида уз цев једнака нули.

(е) Поступајући као у претходном делу, у моменту када је висинска разлика између десног и левог дела једнака $\Delta H(t) = h_2(t) - h_1(t)$, долазимо до закључка да је $\mathscr{P}(t) = \frac{\alpha\rho g^2 (\Delta H(t))^2 r^4}{l}$. Да бисмо нашли укупну ослобођену енергију, потербно је да пронађемо функцију $\Delta H(t)$. Приметимо да важи $\frac{\mathrm{d}(\Delta H(t))}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{\rho\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)$, одакле интеграцијом долазимо до $\Delta H(t) = (h_2 - h_1)\exp\left(-\frac{\alpha r^4 g(r_1^2 + r_2^2)}{\pi l r_1^2 r_2^2} t\right)$. Из овога следи $\mathscr{P}(t) = \frac{\alpha\rho g^2 r^4}{l}(h_2 - h_1)^2 \exp\left(-\frac{2\alpha r^4 g(r_1^2 + r_2^2)}{\pi l r_1^2 r_2^2} t\right)$. Ослобођена топлота за време T је дата као $\mathscr{Q} = \int_0^T \mathscr{P}(t)\mathrm{d}t = \frac{r_1^2 r_2^2 \rho g \pi (h_1 - h_2)^2}{2(r_1^2 + r_2^2)}\left(1 - \exp\left(-\frac{2\alpha r^4 g(r_1^2 + r_2^2)}{\pi l r_1^2 r_2^2} t\right)\right)$.

(ж) Након успостављања равнотеже, висине водених стубова у обе посуде су исте и ту висину ћемо означити са h. Укупна запремина воде на почетку (без занемариве, али и константне, запремине у хоризонталној цеви) износи $V_0 = R_1^2\pi h_1 + R_2^2\pi h_2$, док је укупна запремина воде након успостављања равнотеже $V_1 = (R_1^2 + R_2^2)\pi h$. Како је густина воде константна у експерименту, важи $V_0 = V_1$, одакле добијамо $h = \frac{r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2}{r_1^2 + r_2^2}$. Гравитациона потенционална енергија система на почетку износи $E_{\rm pot}^{(0)} = \left(\frac{1}{2}\rho r_1^2\pi h_1^2 + \frac{1}{2}\rho r_2^2\pi h_2^2\right)g$, док је гравитациона потенцијална енергија система на крају једнака $E_{\rm pot}^{(\infty)} = \frac{1}{2}\rho(r_1^2\pi + r_2^2\pi)h^2 g$. Губитак гравитационе потенцијалне енергије стога износи $\Delta E_{\rm pot} = E_{\rm pot}^{(\infty)} - E_{\rm pot}^{(0)} = -\frac{r_1^2 r_2^2 \rho g\pi(h_1-h_2)^2}{2(r_1^2+r_2^2)}$. Ово се поклапа са $T \to +\infty$ лимесом ослобођене енергије рачунате под (е).

(з) За RC коло важи једначина $R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{q}{C}$, чије је решење дато са $q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$. Повлачећи аналогију са пређашњим резултатом за величину $\Delta H(t)$, уз израз за R дат у тексту задатка, долазимо до $C = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2 \rho\pi g}$.

(и) У овом режиму, укупна механичка енергија се одржава. Укупна гравитациона потенцијална енергија је дата као $E_{\rm pot} = \frac{r^2}{4}\rho g\pi(\Delta H(t))^2$, док је кинетичка енергија кретања воде дата као $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\Delta H(t))}{\mathrm{d}t}\right)^2 \rho r^2\pi(l + h_1 + h_2)$, где смо искористили услов да је дужина воденог стуба константна и износи $l + h_1 + h_2$. Уочавајући аналогију са енергијом LC електричног кола, дату са $\frac{1}{2}L\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2C}q^2$, долазимо до ефективне вредности за $L = \frac{1}{4}(l + h_1 + h_2)\rho r^2\pi$, што као период хармонијских осцилација даје $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{\frac{l+h_1+h_2}{2g}}$.

Решење 3: временска интерференција (10 поена)

(а) Фазна разлика два таласа је једнака $\phi = \phi_2 - \phi_1$. Пошто је фаза i-тог таласа једнака $\phi_i = -\omega \cdot t_i$, добијамо $\phi = \phi_2 - \phi_1 = -\omega \cdot t_2 - (-\omega \cdot t_1)$. Одавде је $\phi = -\omega \cdot t_2 + \omega \cdot t_1 = -\omega(t_2 - t_1)$. Како је $t_1 = -\frac{\tau}{2}$ и $t_2 = \frac{\tau}{2}$, следи $t_2 - t_1 = \frac{\tau}{2} - \left(-\frac{\tau}{2}\right) = \tau$, па је коначно $\phi = -\omega \cdot \tau$.

(б) Изаберимо координатни систем тако да је координатни почетак на месту генерисања таласа, а да је координата детектора једнака x. Временска зависност електричног поља првог и другог таласа на месту детекције је $E_1 = A_0 \cos\left[\omega(t - t_1) - kx\right]$ и $E_2 = A_0 \cos\left[\omega(t - t_2) - kx\right]$, а k је таласни број. Пошто је $t_1 = -\frac{\tau}{2}$ и $t_2 = \frac{\tau}{2}$, добијамо $E_1 = A_0 \cos\left[\omega\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - kx\right] = A_0 \cos\left[\omega t - kx + \frac{\omega\tau}{2}\right]$ и $E_2 = A_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - kx\right] = A_0 \cos\left[\omega t - kx - \frac{\omega\tau}{2}\right]$. Укупно електрично поље је $E = E_1 + E_2$, па је $E = A_0 \cos\left[\omega t - kx + \frac{\omega\tau}{2}\right] + A_0 \cos\left[\omega t - kx - \frac{\omega\tau}{2}\right]$. Одатле, користећи идентитет за збир косинуса, односно $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$, где је овде $a = \omega t - kx$ и $b = \frac{\omega\tau}{2}$, добијамо $E = 2A_0 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cos\left(\omega t - kx\right)$. Пошто је интензитет таласа сразмеран квадрату амплитуде, а амплитудни фактор у претходном изразу је $2A_0 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, следи $I(\omega) \sim \left[2A_0 \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]^2 = 4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$. Максимална вредност интензитета добија се када је $\cos^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 1$, па је $I_{\max} \sim 4A_0^2$. Дељењем ова два израза добијамо $\frac{I(\omega)}{I_{\max}} = \frac{4A_0^2 \cos^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{4A_0^2}$, односно $\frac{I(\omega)}{I_{\max}} = \cos^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$.

(в) Максимуми интензитета се остварују кад је $\cos^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 1$, односно када је $\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \pm 1$. Одатле налазимо $\frac{\omega\tau}{2} = m\pi$, где је $m = 0,1,2,\ldots$, па је $\omega\tau = 2m\pi$, односно $\omega_m^{(\max)} = \frac{2m\pi}{\tau}$. Минимуми интензитета се остварују кад је $\cos^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0$, односно када је $\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0$. Зато је $\frac{\omega\tau}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, где је $m = 0,1,2,\ldots$, одакле је $\omega\tau = (2m+1)\pi$, па је $\omega_m^{(\min)} = \frac{(2m+1)\pi}{\tau}$. Размак између два суседна максимума је $\Delta\omega = \omega_{m+1}^{(\max)} - \omega_m^{(\max)} = \frac{2(m+1)\pi}{\tau} - \frac{2m\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau}$. Временски помак τ се може одредити мерењем размака између два суседна максимума у спектру $\Delta\omega$ и налажењем τ као $\tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

(г) У Јанговом огледу фазна разлика два таласа настаје због различитих путева који они прелазе до тачке на екрану, а у временском огледу фазна разлика је последица временског помераја између два таласа и зависи од фреквенције таласа, као што је показано у делу (а), јер је $\phi = -\omega\tau$. Зато се при Јанговом огледу минимуми и максимуми јављају са променом положаја тачке на екрану, јер се тада мења путна разлика, а у временском огледу се јављају са променом фреквенције таласа, јер се тада мења фазна разлика $\phi = -\omega\tau$. Зато је аналогон положају тачке на екрану у Јунговом огледу, фреквенција таласа у временском огледу.

(д) Нека је зависност електричног поља првог таласа од времена $E_1(t) = A_1 \cos\left[\omega(t - t_1) - kx\right]$, а другог $E_2(t) = A_2 \cos\left[\omega(t - t_2) - kx\right]$ где су A_1 и A_2 међусобно различите амплитуде. Уведимо смену $\omega(t - t_1) - kx = \omega t'$, тако да је $E_1(t) = A_1 \cos\left(\omega t'\right)$. Пошто се други талас у односу на први разликује за фазу ϕ, за њега можемо писати $E_2(t) = A_2 \cos\left(\omega t' + \phi\right)$. Укупно електрично поље је једнако $E = E_1 + E_2 = A_1 \cos\left(\omega t'\right) + A_2 \cos\left(\omega t' + \phi\right)$. Користећи идентитет $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$, добијамо $E = A_1 \cos\left(\omega t'\right) + A_2 \cos\left(\omega t'\right) \cos\phi - A_2 \sin\left(\omega t'\right) \sin\phi$. Ова зависност од времена се може представити у облику $E = A \cos\left(\omega t' + \delta\right)$. Пошто је $A \cos\left(\omega t' + \delta\right) = A \cos\left(\omega t'\right) \cos\delta - A \sin\left(\omega t'\right) \sin\delta$, изједначавањем чланова уз $\cos\left(\omega t'\right)$ и $\sin\left(\omega t'\right)$ у изразима за E налазимо $A_1 + A_2 \cos\phi = A \cos\delta$ и $A_2 \sin\phi = A \sin\delta$. Сабирањем квадрата последње две једначине следи $\left(A_1 + A_2 \cos\phi\right)^2 + \left(A_2 \sin\phi\right)^2 = A^2 \cos^2\delta + A^2 \sin^2\delta = A^2$. Зато је $A^2 = A_1^2 + 2A_1A_2 \cos\phi + A_2^2 \cos^2\phi + A_2^2 \sin^2\phi$. Како је $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$, добијамо $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\phi$. С обзиром да је интензитет сразмеран квадрату амплитуде електричног поља налазимо $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\phi$. Како је у овом задатку $\phi = -\omega\tau$, а $\cos(-\omega\tau) = \cos(\omega\tau)$, добијамо $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\omega\tau\right)$. Интензитет је минималан кад је $\cos\left(\omega\tau\right) = -1$, а максималан кад је $\cos\left(\omega\tau\right) = 1$, па је $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ и $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$. Одатле налазимо да је $\nu = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{\left(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\right) - \left(I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\right)}{\left(I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\right) + \left(I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\right)} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$. За $I_1 = I_2$ је $\nu = 1$ (изванредна видљивост), а за $I_1 \ll I_2$ је $\nu \approx \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_2} = 2\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$, па у граничном случају тежи нули (врло слаба видљивост).

(ђ) Интензитет који мери детектор је $I_{\text{mer}} = \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega/2}^{\omega + \delta\omega/2} I(\omega')\, \mathrm{d}\omega'$, где је $I(\omega') = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\omega'\tau\right)$. Одатле је $I_{\text{mer}} = \frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega/2}^{\omega + \delta\omega/2} \left[I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\omega'\tau\right)\right] \mathrm{d}\omega'$. Први део интеграла даје $\frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega/2}^{\omega + \delta\omega/2} \left(I_1 + I_2\right) \mathrm{d}\omega' = I_1 + I_2$. За други део користимо $\int \cos\left(\omega'\tau\right) \mathrm{d}\omega' = \frac{\sin\left(\omega'\tau\right)}{\tau}$, па је $\frac{1}{\delta\omega} \int_{\omega - \delta\omega/2}^{\omega + \delta\omega/2} \cos\left(\omega'\tau\right) \mathrm{d}\omega' = \frac{1}{\delta\omega\tau}\left[\sin\left(\omega\tau + \frac{\delta\omega\tau}{2}\right) - \sin\left(\omega\tau - \frac{\delta\omega\tau}{2}\right)\right]$.

Користећи идентитет $\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos a\sin b$, добијамо $\frac{1}{\delta\omega}\int_{\omega-\delta\omega/2}^{\omega+\delta\omega/2}\cos(\omega'\tau)\,\mathrm{d}\omega'=\cos(\omega\tau)\frac{\sin\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}}{\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}}$. Одатле је након решавања интеграла $I_{\text{mer}}=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\omega\tau)\frac{\sin\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}}{\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}}$. За $\delta\omega\cdot\tau\ll 1$ је $\frac{\sin\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}}{\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}}\approx 1$, па се тад решење овог дела задатка своди на решење претходног дела.

(е) Из решења дела задатка под (д) следи $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\langle\cos\phi\rangle$, где је ϕ фазна разлика два таласа, а $\langle\rangle$ означава средњу вредност. Нека је $\phi=\phi_0+z$, где је $\phi_0=\omega\tau$ средња вредност фазне разлике, а z одступање од средње вредности. Тада је $\langle\cos\phi\rangle=\int\mathrm{d}\phi\cos\phi\, g(\phi-\phi_0)$. Уведимо смену $z=\phi-\phi_0$, односно $\phi=\phi_0+z$ и $\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}z$. Тада је $\langle\cos\phi\rangle=\int\mathrm{d}z\cos(\phi_0+z)g(z)$. Користећи интеграл дат на крају текста задатка добијамо $\langle\cos\phi\rangle=\cos\phi_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$. Пошто је $\phi_0=\omega\tau$, коначно добијамо $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos(\omega\tau)e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$. Одатле се види да декохеренција смањује интерференциони члан за фактор $e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$.

(ж) Допринос електричног поља m-тог таласа на месту детекције је $E_m=A\cos[\omega(t-t_m)-kx]$. Пошто су таласи временски померени за τ, можемо писати $t_m=t_0+m\tau$. Увођењем смене $\omega t'=\omega(t-t_0)-kx$ следи $E_m=A\cos(\omega t'-m\omega\tau)$. Тако је укупно електрично поље $E=E_0+E_1+\ldots+E_{N-1}$, одакле је $E=A[\cos\omega t'+\cos(\omega t'-\omega\tau)+\ldots+\cos(\omega t'-(N-1)\omega\tau)]$. Користећи идентитет дат на крају текста задатка, односно $\cos x+\cos(x+a)+\ldots+\cos(x+(N-1)a)=\frac{\sin\frac{Na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cos\left(x+\frac{(N-1)a}{2}\right)$, где је у нашем случају $x=\omega t'$ и $a=-\omega\tau$, добијамо $E=A\frac{\sin\frac{N\omega\tau}{2}}{\sin\frac{\omega\tau}{2}}\cos\left(\omega t'-\frac{(N-1)\omega\tau}{2}\right)$. Знак у аргументу косинуса није битан за интензитет, јер он утиче само на укупну фазу таласа. Одатле следи да је интензитет сразмеран квадрату амплитудног фактора, па је $\frac{I(\omega)}{I_{\max}}=\frac{1}{N^2}\frac{\sin^2\frac{N\omega\tau}{2}}{\sin^2\frac{\omega\tau}{2}}$, јер се у главном максимуму свих N таласа сабира у фази и амплитуда је N пута већа од амплитуде једног таласа, па је $I_{\max}\sim N^2A^2$. Главни максимуми се добијају кад је $\sin\frac{\omega\tau}{2}=0$, односно када је $\frac{\omega\tau}{2}=m\pi$, одакле је $\omega_m=\frac{2m\pi}{\tau}$, $m=0,1,2,\ldots$. Када се повећа број таласа N, долази до изражене деструктивне интерференције за фазне разлике које су само мало удаљене од оне које задовољавају услов за максимум. Док се код два таласа светлост споро „поништава“ са удаљавањем од фазне разлике која задовољава тај услов, код великог броја таласа чак и минимално удаљавање од тог угла брзо доводи до потпуног поништавања таласа.

(з) Из решења претходног дела задатка следи да је укупно електрично поље збир доприноса N таласа од којих су свака два суседна померена за исту фазу. Укупно електрично поље након трансмисије кроз дифракциону решетку са малим прорезима се такође добија као збир доприноса N таласа од којих су свака два суседна померена за исту фазу. Код дифракционе решетке та фазна разлика настаје због разлике путева таласа из суседних прореза, док у овом временском огледу фазна разлика настаје због временског помераја суседних таласа. У оба случаја добија се исти тип збира косинуса и исти услов за оштре главне максимуме. Зато оглед из претходног дела задатка одговара дифракционој решетки.

Задатке припремили: *др Дејан М. Ђокић* (1) , Институт за физику у Београду,
др Душан Ђорђевић (2) *и Милош Петрашиновић* (3), Физички факултет Универзитета у Београду.
Рецензенти: *др Душан Ђорђевић* (1) , Физички факултет Универзитета у Београду,
др Дејан М. Ђокић (2, 3) *и др Ненад Вукмировић* (3), Институт за физику у Београду.
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *проф. др Имре Гут*, ПМФ Универзитета у Новом Саду.