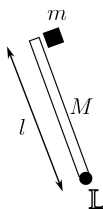




Задатак 1: Бацање тела руком (10 поена)

У овом задатку разматраћемо како брзина којом човек може руком да баца неко тело зависи од масе тог тела.

- (а) **(0,5 поена)** Користићемо најпре једноставан модел по коме човек на тело делује импулсном силом интензитета F чији је правац и смер константан. Тело је у почетном тренутку у мировању, након чега током временског интервала τ делује поменута сила и тело бива избачено. Одредити зависност интензитета брзине v којом ће човек избацити тело од масе тела m сматрајући да су F и τ исти за свако тело.
- (б) **(2 поена)** Сада ћемо размотрити сложенији модел приказан на слици 1. У оквиру овог модела сматрати да доњи део руке (лакрат, подлактица и длан) представља хомогени штап масе M и дужине l који ротира око непокретне тачке где се налази лакрат (тачка L на слици 1). Док човек баца тело масе m држи га на длану. Тело и рука, који чине систем, су у почетном тренутку мировали. Рад који након тога до тренутка избацивања тела изврше све силе које делују на систем је једнак A и независан је од масе тела. Одредити зависност интензитета брзине v којом ће човек избацити тело од масе тела m .



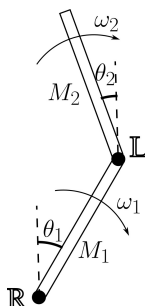
Слика 1: Модел руке у делу задатка (б).

- (в) **(1,5 поена)** У доњој табели је приказана зависност интензитета v брзине избаченог тела од масе тог тела m за човека чија је маса доњег дела руке $M = 2,0$ kg. Да ли је ова зависност боље описана моделом из дела (а) или дела (б) задатка?

m (kg)	0,057	0,16	0,73	1,42	2,10	3,40
v (m/s)	20,0	17,5	13,2	10,4	8,5	7,2

Надаље разматрамо модел по коме се рука састоји од два сегмента, приказан на слици 2. Први сегмент описује део од рамена до лакта и представља се хомогеним штапом масе M_1 и дужине l_1 , док други сегмент описује део од лакта до длана и представља се хомогеним штапом масе M_2 и дужине l_2 . Сматрати да је раме непокретно (тачка R на слици 2). У тренутку кад човек избацује тело угаона брзина првог сегмента је ω_1 , а другог ω_2 , при чему су смерови ових угаоних брзина приказани на слици 2. Углови који ови сегменти заклапају са вертикалом у том тренутку су редом θ_1 и θ_2 (при чему је $\theta_1 < 45^\circ$ и $\theta_2 < 45^\circ$).

- (г) **(3 поена)** Одредити кинетичку енергију руке у тренутку када човек избацује тело.
- (д) **(3 поена)** Ако је познато да је тело са длана избачено брзином интензитета v , при којим вредностима угаоних брзина ω_1 и ω_2 је кинетичка енергија руке у тренутку избацивања тела минимална?



Слика 2: Модел руке у деловима задатка (г) и (д).



Задатак 2: Термодинамички поглед на срећу (10 поена)

Помоћу метода статистичке физике, разматраћемо људску срећу у оквиру једноставног модела.

Замислимо (изолован) систем који се састоји од N људи. У овом систему људи се могу наћи само у два стања: **среће** (s) и **туге** (t). У овом систему људи немају других особина. За људе који су срећни често кажемо да су пуни енергије, па ће и људи из овог система који се налазе у стању среће имати енергију E_0 , док људи који су у стању туге имати енергију 0. Укупна енергија људи у овом систему је $\alpha N E_0$, где је $\alpha \in \mathbb{Q}$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

- (а) **(0,5 поена)** Колика је вероватноћа да је насумично одабран човек из овог скупа срећан? Колика је вероватноћа да је тужан?
- (б) **(1 поен)** Уколико ипак људи у стању туге имају неку малу количину енергије $\epsilon > 0$, и $\epsilon < E_0$, израчунати вероватноћу да је насумично одабран човек из овог скупа срећан, односно тужан.

Вратимо се на случај када људи у стању туге имају енергију 0.

- (в) **(2,5 поена)** Помоћу статистичке дефиниције ентропије, израчунати ентропију оваквог система, сматрајући да је број људи јако велики.

Помоћ: Статистичка дефиниција ентропије је $S = k_b \ln \Omega$, где је Ω статистичка тежина, односно број микро стања који одговара истом макро стању. За велике вредности N користити Стирлингову апроксимацију :

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

- (г) **(2 поена)** Помоћу дефиниције ентропије $dS = \frac{dQ}{T}$ извести израз за T , температуру овог система.
Помоћ: Замислимо да $\alpha \rightarrow \alpha + d\alpha$. Изразити dQ и dS помоћу α и $d\alpha$.

- (д) **(1 поен)** При којој температури је сваки човек тужан? А при којој сваки други? Колико мора бити енергија човека у стању среће да би на собној температури сваки четврти човек био срећан?
Вредност Болцманове константе је $k_b = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$. За собну температуру узети $T = 300K$.

- (ђ) **(1,5 поен)** Трећи закон термодинамике налаже да када се систем тежи температурној апсолутној нули, ентропија тежи својој минималној вредности (нули).

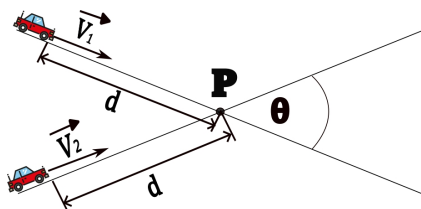
Да ли овако добијена ентропија задовољава трећи закон термодинамике?

- (е) **(1,5 поена)** Одредити однос броја срећних и тужних људи на температури T .



Задатак 3: (Не)релативистичко поздрављање (10 поена)

У овом задатку ћемо размотрити поздрављање два пријатеља, Алексе и Бранка, који се крећу праволинијским путањама које се секу у тачки P , под углом θ .



За почетак ћемо разматрати случај нерелативистичког кретања аутомобила, током ког Алекса поздравља Бранка користећи звучни сигнал на свом аутомобилу (сирена). Звук се кроз средину простире брзином u . Сигнал који је Алекса, који се креће брзином v_1 , емитовао кад се налазио на удаљености d од тачке P стиже до Бранка, који се креће брзином v_2 , кад се Бранко налази на истој удаљености d од тачке P . Уколико сирена Алексиног аутомобила произведе два звучна сигнала, фреквенције f_A , у кратком временском интервалу Δt_A , одредити:

- (1,5 поена) временски интервал Δt_P између тренутака када ти звучни сигнали дођу до тачке P , односно временски интервал Δt_B када дођу до Бранковог аутомобила.
- (1 поен) фреквенцију звучних сигнала које региструје детектор у тачки P , односно фреквенцију коју чује Бранко.

Година је 2103. и технологија је напредовала, тако да се аутомобили крећу релативистичким брзинама. Како поздрављање звучним таласима није могуће, уместо сирена у аутомобиле је уграђена светлосна сигнализација, тако да сваки аутомобил може да производи и детектује различите светлосне сигнале. Поред напретка технологије, напредовала је и медицина, тако да су наши јунаци из претходног дела задатка и даље пријатељи и способни су за вожњу. Крећући се на исти начин као на слици, у односу на Земљу, Алекса поново поздравља Бранка, овај пут емитујући два светлосна сигнала, фреквенције f_0 у кратком временском интервалу $\Delta t'$, мерено у његовом аутомобилу. Сигнал који је Алекса (који се креће брзином v_1), емитовао кад се налазио на удаљености d од тачке P стиже до Бранка (који се креће брзином v_2), кад се Бранко налази на истој удаљености d од тачке P , мерено у систему везаном за Земљу. Уколико је брзина светлости c , одредити:

- (2 поена) дужину временског интервала Δt у систему везаном за Земљу, између тренутака када детектор региструје ове сигнале у тачки P .
- (5 поена) дужину временског интервала $\Delta t''$ између тренутака када детектор у Бранковом аутомобилу детектује ове сигнале.
- (0,5 поена) Одредити фреквенцију светлосних сигнала које региструје детектор у тачки P , f , и фреквенцију коју региструје детектор у Бранковом аутомобилу, f_1 .



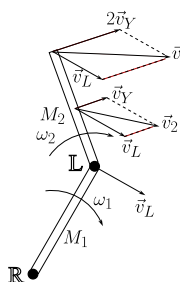
Решење задатка 1

- (а) Убрзање тела је $a = \frac{F}{m}$ **0,2п**, па је брзина тела при избацивању $v = at$ **0,1п**. Одатле је $v = \frac{F\tau}{m}$ **0,2п**.
- (б) Брзина тела при избацивању је $v = l\omega$ **0,4п**, где је ω угаона брзина ротације руке. Кинетичка енергија система тело-рука у тренутку избацивања тела је $T = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$ **0,8п**, где је $I = \frac{1}{3}Ml^2$ момент инерције штапа у односу на осу која пролази кроз тачку L и нормална је на раван цртежа. Из закона одржања енергије је $A = T$ **0,3п**. Из претходних једначина налазимо $v = \sqrt{\frac{6A}{M+3m}}$ **0,5п**.
- (в) Према моделу из дела (а) константна је величина $c_a = mv$ **0,2п**, према моделу из дела (б) константна је величина $c_b = v^2 \cdot (M + 3m)$ **0,2п**. У доњој табели је приказана израчуната зависност ових величина од масе тела **0,5п**.

m (kg)	0,057	0,16	0,73	1,42	2,10	3,40
v (m/s)	20,0	17,5	13,2	10,4	8,5	7,2
c_a (kg · m/s)	1,1	2,8	9,6	14,8	17,9	24,5
c_b (kg · m ² /s ²)	868	760	730	677	600	632

На основу резултата приказаних у табели, видимо да је c_b много ближе константи него c_a . Зато закључујемо да модел (б) много боље описује зависност v од m **0,6п**.

- (г) Кинетичка енергија првог сегмента је $T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$, где је $I_1 = \frac{1}{3}M_1l_1^2$ момент инерције у односу на осу која пролази кроз тачку R и нормална је на раван цртежа, одакле је $T_1 = \frac{1}{6}M_1l_1^2\omega_1^2$ **0,5п**. Да бисмо нашли кинетичку енергију другог сегмента, потребно је да нађемо брзину његовог центра масе. Та брзина је једнака $\vec{v}_2 = \vec{v}_L + \vec{v}_Y$, где $\vec{v}_Y$ има правац нормалан на други сегмент, смер надесно, а по интензитету је једнак $v_Y = \frac{1}{2}l_2\omega_2$, док је $\vec{v}_L$ брзина лакта која има правац нормалан на први сегмент, смер надесно, а по интензитету је једнака $v_L = l_1\omega_1$ (видети слику 1). Одатле је $v_2^2 = v_L^2 + v_Y^2 + 2\vec{v}_L \cdot \vec{v}_Y$. Из геометрије проблема налазимо да је угао између $\vec{v}_Y$ и $\vec{v}_L$ једнак $\theta_1 + \theta_2$, одакле је $v_2^2 = l_1^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}l_2^2\omega_2^2 + l_1\omega_1l_2\omega_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ **1,2п**. Кинетичка енергија другог сегмента је тада $T_2 = \frac{1}{2}M_2v_2^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ **0,3п**, где је $I_2 = \frac{1}{12}M_2l_2^2$. Користећи претходне једначине налазимо да је укупна кинетичка енергија $T = T_1 + T_2$, одакле је $T = \frac{1}{6}(M_1 + 3M_2)l_1^2\omega_1^2 + \frac{1}{6}M_2l_2^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}M_2l_1\omega_1l_2\omega_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$ **1п**.



Слика 1: уз решење делова задатка (г) и (д).

- (д) Брзина тела при избачају је једнака брзини горњег краја другог сегмента и једнака је $\vec{v} = \vec{v}_L + 2\vec{v}_Y$ (слика 1) **0,5п**. Кинетичка енергија се може записати и као $T = \frac{1}{6}(M_1 + 3M_2)v_L^2 + \frac{1}{6}M_2(2\vec{v}_Y)^2 + M_2\vec{v}_L \cdot \vec{v}_Y$, одакле следи $T = \frac{1}{6}(M_1 + M_2)v_L^2 + \frac{1}{6}M_2v^2 + \frac{1}{6}M_2\vec{v} \cdot \vec{v}_L$. **1п** Угао α између вектора $\vec{v} = \vec{v}_L + 2\vec{v}_Y$ и $\vec{v}_L$ је мањи од угла између вектора $\vec{v}_L$ и $\vec{v}_Y$ (слика 1), који је једнак $\theta_1 + \theta_2$. С обзиром да је $\theta_1 < 45^\circ$ и $\theta_2 < 45^\circ$, следи да је угао α оштар, одакле је $\cos \alpha > 0$. Одатле је $T = \frac{1}{6}(M_1 + M_2)v_L^2 + \frac{1}{6}M_2v^2 + \frac{1}{6}M_2vv_L \cos \alpha$. **0,5п** Пошто су коефицијенти уз v_L^2 и v_L позитивни, следи да је кинетичка енергија минимална за $v_L = 0$, односно $\omega_1 = 0$.



Тада је $\omega_2 = \frac{v}{l_2}$ [1п]. Резултат овог дела задатка оправдава модел коришћен у делу (б), пошто показује да се при ефикасном бацању тела креће само доњи део руке.

Ученике и наставнике заинтересоване за ову тему упућујемо на рад:

R. Cross, Am. J. Phys. 72, 305 (2004),

одакле је преузета идеја за овај задатак.

Решење задатка 2

- (а) Како је систем изолован, укупна енергија система је константна и износи $\alpha N E_0$. Следи да има α људи у стању среће па је $p(S) = \alpha$ и $p(T) = 1 - \alpha$.
- (б) Уколико човек у стању туге има енергију ϵ тада за укупну енергију система важи $n_s E_0 + n_t \epsilon = \alpha N E_0$. Мора важити да је $n_s + n_t = N$, где је n_s, n_t број људи у стању среће односно туге. Решавањем система добијамо $n_s = \frac{N(\alpha E_0 - \epsilon)}{E_0 - \epsilon}$ и $n_t = \frac{(1 - \alpha) N E_0}{E_0 - \epsilon}$. У овом случају је $p(S) = \frac{\alpha E_0 - \epsilon}{E_0 - \epsilon}$ и $p(T) = \frac{(1 - \alpha) E_0}{E_0 - \epsilon}$.
- (в) Статистичка дефиниција ентропије је $S = k_b \ln \Omega$, где је Ω статистичка тежина, односно број микро стања који одговара истом макро стању. У овом случају $\Omega = \frac{N!}{(\alpha N)!((1 - \alpha)N)!}$ број начина како можемо од N људи одабрати αN срећних и $(1 - \alpha)N$ тужних. Користећи Стирлингову апроксимацију:

$$\ln \Omega \approx N \ln N - (\alpha N) \ln(\alpha N) - (1 - \alpha)N \ln((1 - \alpha)N).$$

Одавде је ентропија система:

$$S = N k_b \left(\alpha \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) + (1 - \alpha) \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) \right).$$

- (г) При $\alpha \rightarrow \alpha + d\alpha$ имамо $dQ = N E_0 d\alpha$ и $dS = \frac{dS}{d\alpha} d\alpha$. Рачунањем првог извода S по α и заменом у релацију $T = \frac{dQ}{dS}$ добијамо:

$$T = \frac{E_0}{k_b} \frac{1}{\ln(1 - \alpha) - \ln \alpha}.$$

- (д) Да би сваки човек био тужан мора бити $\alpha = 0$ односно $\alpha \rightarrow 0$, одакле заменом у израз за температуру добијамо $T \rightarrow 0$. Да би сваки други човек био тужан мора бити $\alpha = \frac{1}{2}$ одакле $T \rightarrow \infty$. Када би сваки четврти човек био срећан, $\alpha = \frac{1}{4}$ па изражавањем E_0 из израза за температуру и заменом бројних вредности добијамо: $E_0 = 4,4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$.

- (ђ) У претходном делу видели смо да $T \rightarrow 0$ када $\alpha \rightarrow 0$. Трећи закон термодинамике налаже

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = 0,$$

одакле:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\alpha) = 0$$

коришћењем Лопиталовог правила на чланове облика $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \ln \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\alpha^2}{\alpha} = 0$.

- (е) У првом делу задатка показали смо да је $\frac{p(s)}{p(t)} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$. Експоненцирањем израза за температуру и сређивањем добијамо $\frac{\alpha}{1 - \alpha} = e^{\frac{-E_0}{k_b T}}$. На основу облика, однос задовољава такозвану *Болцманову расподелу*.



Решење задатка 3

- (а) Уколико су t_{1P} и t_{2P} тренуци када сигнали дођу до тачке P , тада је $\Delta t_P = t_{2P} - t_{1P} = \Delta t_A + \frac{d_1 - v_1 \Delta t_A}{u} - \frac{d_1}{u}$. Одавде је: $\Delta t_P = \Delta t_A (1 - \frac{v_1}{u})$. Нека сигнали које Алексин аутомобил емитује у тренуцима t_A и $t_A + \Delta t_A$ стижу до Бранка у тренуцима t_B и $t_B + \Delta t_B$. Нека се у тренутку $t_A + \Delta t_A$ Алекса налази у тачки A' , а Бранко у тренутку $t_B + \Delta t_B$ у тачки B' . У троуглу $A'PB'$ дужине страница су $A'P = d - v_1 \Delta t_A$, $B'P = d - v_2 \Delta t_B$ и $A'B' = u(t_B + \Delta t_B - t_A - \Delta t_A)$. Применом косинусне теореме на тај троугао следи $u^2(t_B + \Delta t_B - t_A - \Delta t_A)^2 = (d - v_1 \Delta t_A)^2 + (d - v_2 \Delta t_B)^2 - 2(d - v_1 \Delta t_A)(d - v_2 \Delta t_B) \cos \theta$. Коришћењем једнакости $u(t_B - t_A) = 2d \sin \frac{\theta}{2}$ и занемаривањем квадратних чланова по Δt_A и Δt_B , налазимо $\Delta t_B = \Delta t_A \frac{u - v_1 \sin \frac{\theta}{2}}{u + v_2 \sin \frac{\theta}{2}}$.
- (б) Како је фреквенција инверзно пропорционална времену $f \sim \frac{1}{\Delta t}$, користећи резултат из претходног дела задатка, закључујемо да је: $f_P = f_A \frac{1}{(1 - \frac{v_1}{u})}$, односно $f_B = f_A \frac{u + v_2 \sin \frac{\theta}{2}}{u - v_1 \sin \frac{\theta}{2}}$.
- (в) Користећи израз за дилатацију времена, у систему S , везаном за тачку P , разлика између тренутака емисије је $\Delta t_e = \Delta t' \gamma_1$, где је $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}$ и $\beta_1 = \frac{v_1}{c}$. Како се Алекса кретао између емитовања, други сигнал ће прећи пут за $\Delta l = v_1 \Delta t_e$ мањи од пређеног пута првог сигнала. Разлика између тренутака детекције је $\Delta t = \Delta t_e - \frac{\Delta l}{c}$. Сређивањем, коначно решење је: $\Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}}$.
- (г) Уколико поставимо референтни систем S у тачку P , а S' у аутомобил којим се креће Алекса и S'' у аутомобил којим се креће Бранко, коришћењем закона о релативистичком слагању брзина, можемо одредити брзину којом се Алекса креће, у референтном систему S'' , v_1'' . Време које протекне између емисије два сигнала, у Бранковом референтном систему: $\Delta t_e'' = \Delta t_e' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}}$. Уколико дуж правца који спаја Бранка и тачку P поставимо x осу, тада су компоненте Алексине брзине у S : $v_{1x} = v_1 \cos \theta$ и $v_{1y} = -v_1 \sin \theta$. Како се у односу на S , S'' креће брзином $\vec{v}_2 = v_2 \vec{e}_x$, то је брзина Алексе у S'' : $v_{1x}'' = \frac{v_1 \cos \theta - v_2}{1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta}$ и $v_{1y}'' = -\frac{v_1 \sin \theta}{\gamma_2 (1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)}$, и важи: $v_1'' = \frac{1}{(1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta - (\beta_1 \beta_2 c \sin \theta)^2}$, где је $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}$ и $\beta_2 = \frac{v_2}{c}$. Аналогним приступом као у првом делу овог задатка, можемо закључити да је: $\Delta t'' = t_{2B}'' - t_{1B}'' = \Delta t_e'' + \frac{L - v_1'' \Delta t_e'' \cos \psi}{c} - \frac{L}{c}$, где је L поново почетна удаљност између Алексе и Бранка, а ψ угао између вектора положаја Алексе и вектора његове брзине. Сигнал који Алекса емитује, у систему S , се креће тако да су компоненте брзине: $c_x = -c \sin(\theta/2)$, $c_y = -c \cos(\theta/2)$. Коришћењем релативистичког закона слагања брзина, компоненте брзине светлости у систему S'' су: $c_x'' = \frac{c_x - v_2}{1 - \frac{v_2 c_x}{c^2}}$ и $c_y'' = \frac{c_y}{\gamma_2 (1 - \frac{v_2 c_x}{c^2})}$. Надаље је: $v_1'' \cos \psi = \vec{v}_1'' \cdot \vec{c}'' \frac{1}{c}$. Коначно, долазимо до решења да је:
- $$\Delta t'' = \Delta t' \left(1 - \frac{v_1'' \cos \psi}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}} = \Delta t' \left(1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2) \sin(\theta/2) - \beta_1 \beta_2 \cos \theta + \beta_2^2 (1 - \beta_1 \sin \theta \cos(\theta/2))}{(1 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta)(1 + \beta_2 \sin(\theta/2))}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}}.$$
- (д) Аналогно као у нерелативистичком случају, одређујемо да је: $f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v_1}{c}}{1 - \frac{v_1}{c}}}$, док је фреквенција коју региструје Бранков аутомобил: $f_1 = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v_1' \cos \psi}{c}} \sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}$.