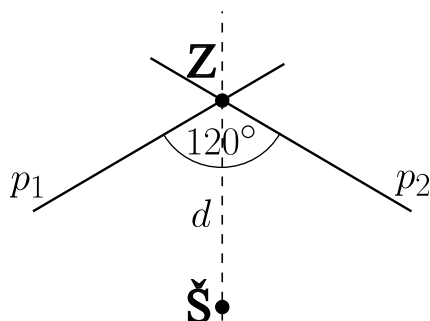


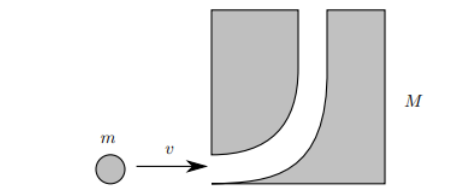


1. Зека Z се налази на пресеку две стазе p_1 и p_2 у пољани, које заклапају угао од 120° , видети слику 1. На симетрали угла $p_1 Z p_2$ на растојању $d = 80 \text{ m}$ од зеке се у пољани налази шаргарепа $\check{S}$. Интензитет брзине зеке по стазама је v_1 , а по пољани v_2 . Које је најмање време за које зека може стићи до шаргарепе ако је:

- (а) (6 поена) $v_1 = 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 4,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
(б) (14 поена) $v_1 = 9,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?



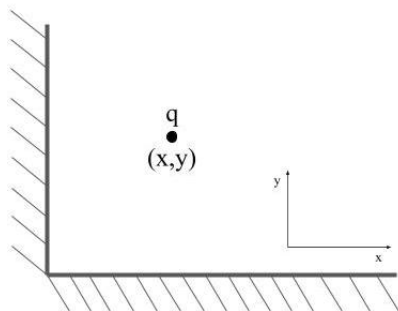
Слика 1: уз задатак 1.



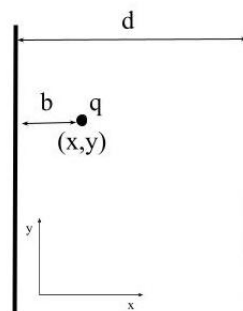
Слика 2: уз задатак 2.

2. Блок масе M , који мирује на глаткој хоризонталној подлози има у себи шупљину као на слици 2. Лопта масе m наилази на шупљину блока крећући се почетном брзином v . Претпоставити да је висина блока занемарљива у односу на висину до које ће се лоптица попети.

- (а) (12 поена) Изразити време које протекне од тренутка када лопта уђе у шупљину блока, до тренутка када се врати у тачку на подлози у којој је у блок ушла. Трење између лопте и блока занемарити.
(б) (8 поена) Израчунати рад који сила нормалне реакције између тела и лоптице изврши над лоптицом, A_{Nl} , односно над блоком, A_{Nb} , до тренутка када лоптица први пут напусти унутрашњост блока.



Слика 3: уз задатак 3(а). Координатни почетак се налази у пресеку плоча.



Слика 4: уз задатак 3(в).

3. Метод ликова је моћан алат коришћен при решавању проблема електростатике. На вама је да га примените на следеће занимљиве случајеве.

- (а) (8 поена) Наелектрисање q налази се у тачки са координатама (x, y) , у простору између две уземљене, идеално проводне плоче које се секу под правим углом као на слици 3. У оквиру метода ликова, проводне плоче се могу заменити тачкастим наелектрисањима (тзв. *ликовима*) тако да се електрично поље у области $(x > 0, y > 0)$ не промени. Колико нам је ликова овог наелектрисања потребно? Одредити њихова наелектрисања и положаје. Одредити силу којом плоче делују на наелектрисање q .
(б) (10 поена) Одредити положаје и наелектрисања ликова у случају да је угао између плоча 45° .
(в) (2 поена) Посматрајмо систем као на слици 4. Колико нам је ликова потребно у овом случају? Објаснити.



2025.

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије

20.05.2025.
Београд

ЗАДАТАК- мисаони експеримент

Задатак 4. [25п] Пазиинии! Иде бооооб!

Боб санка, једносед, излеће великом брзином из кривине на боб стази и наилази на равни део стазе, који се може сматрати као стрма раван нагибног угла 30° . Пошто после овог равног дела наилази јака кривина, пилот боба мора на овом делу добро да успори. Кочење врши тако што спушта једну плочу на лед и на њега примењује сву тежину болида са пилотом. Коефицијент трења плоче са ледом је μ . У болид је постављена мерна опрема, која у веома малим корацима од $0,1\text{ s}$ одређује положај болида и брзину струјања ваздуха у односу на болид. За нулти положај је одабрано време када пилот започиње кочење и

резултати су дати у Табели 1. Све док се болид кретао на овом равном делу стазе у чело болида дува сталан ветар брзине u . Познато је из аеродинамике да је сила отпора средине F_D , са којом ваздух, који се креће брзином v у односу на тело, делује на њу насупрот кретању, је сразмерна са чеоном површином S (површина попречног пресека нормално на правац кретања тела) и такође зависи од облика тела, коју карактерише коефицијент облика C (такозвани коефицијент повлачења). Сила отпора се може израчунати према формули

$$F_D = \frac{1}{2} C \rho_o S v^2,$$

где је ρ_o густина средине. Чеона површина болида са главом пилота је $S = 1,22\text{ m}^2$, густина ваздуха изнад скијашке стазе је $\rho_o = 1,31\text{ kg/m}^3$. Маса болида заједно са пилотом је био 220 kg .



Табела 1. Резултати мерења

Број мерења	положај [m]	брзина [m/s]
1	0,00	40,000
2	2,38	39,165
3	4,67	38,358
4	6,89	37,577
5	9,04	36,822
6	11,11	36,091
7	13,12	35,382
8	15,05	34,695
9	16,92	34,028
10	18,73	33,381

А. [6п] Одредите брзину струјања ваздуха изнад стазе u .

Б. [10п] Написати једначину кретања болида и извршити замену параметара (тј. линеаризацију) да би се на основу линеарне зависности могли одредити коефицијент трења μ и коефицијент повлачења C . Јасно наведите који су нови параметри зависности и израчунајте их. Резултате приказати табеларно.

В. [9п] Нацртати зависност нових параметара и из графика одредити коефицијенте линеарне зависности. На основу ових коефицијента одредите тражене параметре (μ и C).

Напомена: Грешке рачунати само код коефицијената који се добију из графика, као и величина која се рачунају из истих. За убрзање силе земљине теже узети $g = 9.81\text{ m/s}^2$.



2025.

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије

20.05.2025.
Београд

ЗАДАТАК- мисаони експеримент

РЕШЕЊЕ

А. [6п] Пошто се болид креће брзином v према стази, а ветар дува контра брзином u у односу на стазу, укупна брзина ветра у односу на болид је $v + u$, и то мери инструмент **[0.2п]**. Брзина кретања болида у односу на стазу се може одредити на основу промене положаја. Како су временски интервали између мерења кратки, сматра се да је брзина на том кратком делу константна, те се може одредити као промена положаја за протекло време, тј.

$$v_N = \frac{x_N - x_{N-1}}{\Delta t} \text{ [0.8п]}$$

Резултати се налазе у Табели 1.

Табела 1. Приказ брзина

Број мерења	x [m]	$v + u$ [m/s]	v [9x0.4п] [m/s]	u [9x0.1п] [m/s]
1	0,00	40,000		
2	2,38	39,165	23,761	15,404
3	4,67	38,358	22,968	15,390
4	6,89	37,577	22,200	15,378
5	9,04	36,822	21,456	15,366
6	11,11	36,091	20,736	15,354
7	13,12	35,382	20,038	15,344
8	15,05	34,695	19,361	15,333
9	16,92	34,028	18,704	15,324
10	18,73	33,381	18,066	15,314

Из Табеле се види да је брзина дувања ветра $u = 15.356 \text{ m/s}$ **[0.5п]**. Мада се није рачунала грешка, али се брзина ветра заокружује на исто место као мерење брзиномера.

Напомена: Уколико је ученик рачунао брзину са предњим разликама пута, а не са задњим како је дато у решењу, ученику се у потпуности признаје решење.

Б. [10] Једначина транслаторног кретања за овакав случај је

$$ma = \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mg - \frac{1}{2}C\rho_0 S(v+u)^2 = \frac{1-\sqrt{3}\mu}{2}mg - \frac{1}{2}C\rho_0 S(v+u)^2 \text{ [3п]}$$

Односно
$$a = \frac{1-\sqrt{3}\mu}{2}g - \frac{1}{2}\frac{C\rho_0 S}{m}(v+u)^2. \text{ [0.2п]}$$

Ова законитост се може линеаризовати ако се уведу нови параметри

$$Y = a, \quad X = (v+u)^2 \quad k = -\frac{1}{2}\frac{C\rho_0 S}{m} \quad \text{и} \quad n = \frac{1-\sqrt{3}\mu}{2}g \text{ [1.5п]}$$

и линеарна једначина је онда облика $Y = kX + n$.

Како је у тексту задатка наведено, одређивање брзина је вршено у малим временским интервалима, те се може сматрати да је убрзање између два анализирана мерења тако мало, да се убрзавање практично не мења, тј. константно је. Средње убрзање између два мерења можемо одредити као разлика брзина између њих подељено са временским размаком. Како на стази дува константан ветар, убрзање моћемо одредити из разлика брзина болида према стази али и преко релативних брзина. Тако је

$$a_N = \frac{v_N - v_{N-1}}{\Delta t} = \frac{(v+u)_N - (v+u)_{N-1}}{\Delta t} \text{ [0.8п]}$$



2025.

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије

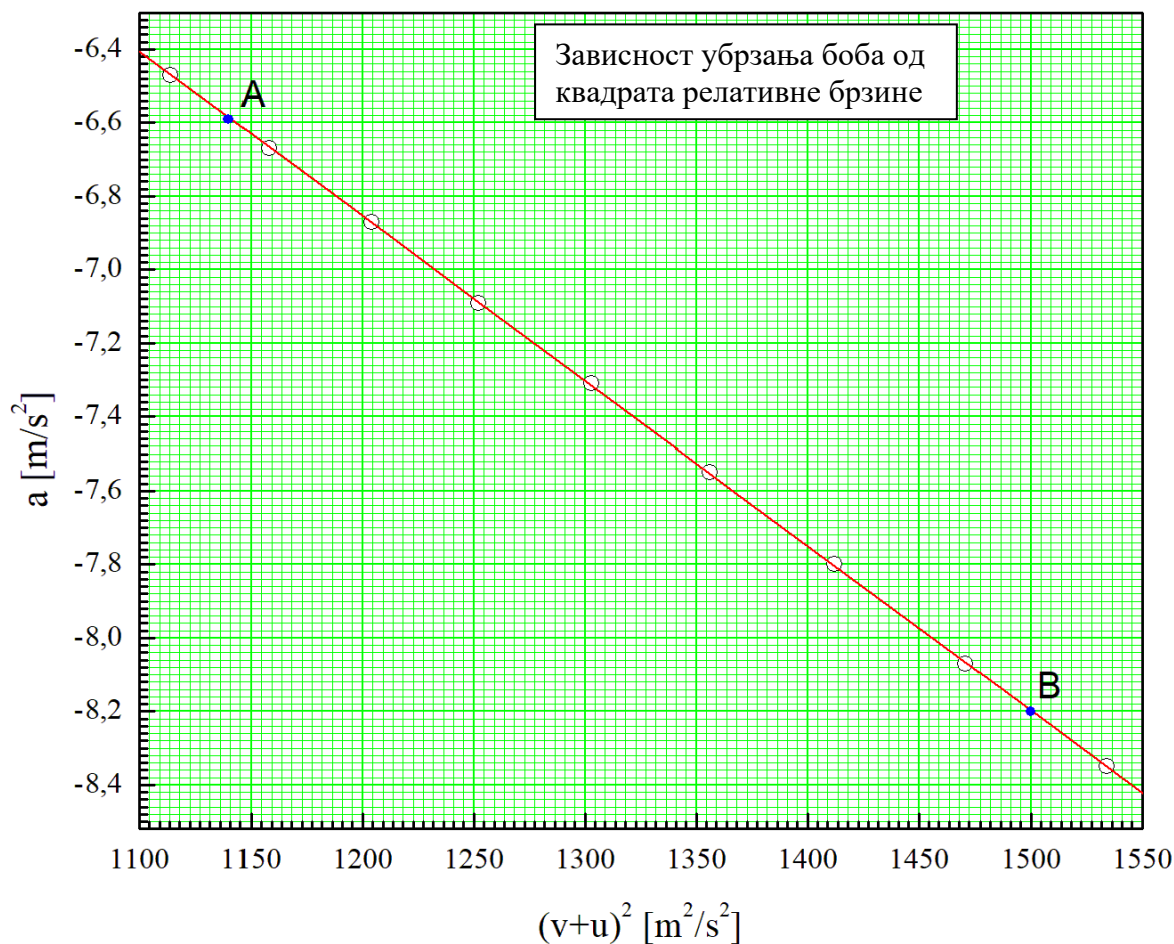
20.05.2025.
Београд

ЗАДАТАК- мисаони експеримент

Табела 2. Приказ линеарних величина

Бр. мерења	$v + u$ [m/s]	$(v + u)^2$ [m ² /s ²] [9x0.1п]	a [m/s ²] [9x0.4п]
1	40,000	1600	
2	39,165	1537	-8,35
3	38,358	1475	-8,08
4	37,577	1414	-7,82
5	36,822	1354	-7,56
6	36,091	1303	-7,31
7	35,382	1253	-7,09
8	34,695	1204	-6,88
9	34,028	1156	-6,67
10	33,381	1116	-6,46

В. [9п] Црта се графичка зависност убрзања болида a у функцији квадрата релативне брзине $(v + u)^2$. Зависност на графику је линеарна и повучена је линија која лепо пролази кроз тачке. Очитавају се са графика две тачке са праве $A = (1140, -6.59)$ и $B = (1500, -8.20)$ [1п] и на основу њих се одреди коефицијент правца



Слика 1. Приказ линеаризованих параметара кретања болида [5п]



2025.

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије

20.05.2025.
Београд

ЗАДАТАК- мисаони експеримент

$$k = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{-8.20 - (-6.59)}{1500 - 1140} = -0.00447$$

Грешка коефицијента правца се рачуна као

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{2\Delta X}{X_B - X_A} + \frac{2\Delta Y}{Y_B - Y_A} = \frac{5}{360} + \frac{0.02}{1.61} = 0.0263$$

где су за грешке X и Y су узете вредности подеока на графику (зависе од графика). Одакле је $\Delta k = 0.000118$. Коначно

$$k = -0.00447 \pm 0.00012 \text{ [0.3+0.6п]}$$

Из вредности k се може одредити фактор повлачења

$$C = -\frac{2mk}{\rho_0 S} = 1.2288$$

и његова грешка: $\Delta C = C \frac{\Delta k}{k} = 1.2288 \frac{0.00012}{0.00447} = 0.0330$. На крају се за фактор повлачења добија

$$C = 1.23 \pm 0.04 \text{ [0.3+0.3п]}$$

Слободан члан линеарне зависности се може одредити ако се уврсти коефицијент правца и вредности рецимо тачке B [0.3п], тј. из једначине $Y_B = kX_B + n$ следи $n = -1.495$. Грешка се рачуна преко релативне грешке $\Delta n = n \frac{\Delta k}{k} = 1.495 \frac{0.00012}{0.00447} = 0.040$, односно

$$n = -1.49 \pm 0.04 \text{ [0.3+0.3п]}$$

Коефицијент трења се може одредити на основу n као

$$\mu = \frac{g - 2n}{\sqrt{3}g} = 0.753$$

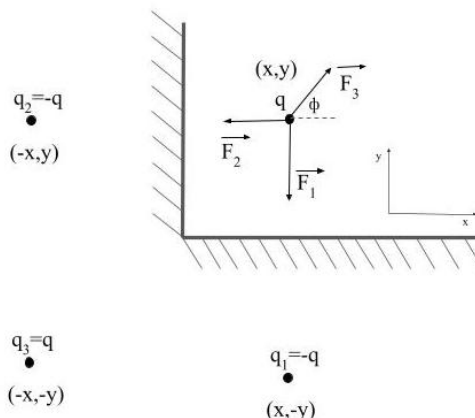
и његова грешка као $\Delta \mu = \mu \frac{\Delta n}{n} = 0.753 \frac{0.04}{1.49} = 0.0202$. Коначно

$$\mu = 0.75 \pm 0.03 \text{ [0.3+0.3п]}$$

Напомена: у добијеним параметрима од 0.3 поена признати 0.2, уколико вредности задовољавају и 0.1 поена ако су параметри (грешке) и добро заокружени.



1. (а) Уколико би се зека кретао правом линијом од пресека две стазе до шаргарепе, стигао би за време $t = \frac{d}{v_2} = 20 \text{ s}$ [1п]. Уколико би се зека кретао неком другом путањом: 1) пређени пут би био већи него кад се креће правом линијом [1п], 2) интензитет брзине би у сваком тренутку био мањи или једнак интензитету брзине кад се креће правом линијом [2п]. Из чињеница 1) и 2) закључујемо да би на некој другој путањи време пута било веће од времена t . Зато је тражено време $t = 20 \text{ s}$ [2п].
- (б) Уколико би се зека кретао правом линијом од пресека две стазе до шаргарепе, стигао би за време $t = \frac{d}{v_2} = 16 \text{ s}$ [2п]. Нека је x -оса права која спаја пресек два пута и шаргарепу. Док се зека креће по пољани, његова x -компонента брзине је увек мања или једнака v_2 [2п]. Док се зека креће по некој од стаза, његова x -компонента брзине је $\frac{1}{2}v_1 = 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} < v_2$ [3п]. 1) Тако закључујемо да је на свим другим путањама x -компонента брзине зеке увек мања или једнака од v_2 [2п]. 2) На свим путањама од пресека два пута до шаргарепе је промена x -координате једнака d [2п]. Из чињеница 1) и 2) следи да би на свакој другој путањи време путовања зеке било веће или једнако t . Тако је тражено време $t = 16 \text{ s}$ [3п].
2. (а) Како је трење у систему занемарљиво, важиће закон одржања импулса. [1п] Уколико са v_x и v_y обележимо хоризонталну, односно вертикалну компоненту брзине лоптице приликом изласка кроз горњи отвор, важиће: $v_x = \frac{m}{m+M}v$. [2п] Из закона одржања енергије можемо одредити вертикалну компоненту брзине: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_x^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) \Rightarrow v_y = \sqrt{\frac{M}{m+M}}v$ [3п]. Како је висина блока занемарљива, можемо занемарити и време које лоптица проведе крећући се кроз блок. Лоптица ће у ваздуху провести време: $t_1 = \frac{2v_y}{g}$ [2п]. Приликом поновног кретања лоптице кроз блок, важиће закон одржања импулса, па ће лоптица напустити блок хоризонталном брзином: $v_1 = \frac{m-M}{m+M}v$ [2п]. У тренутку када се лоптица врати у блок, хоризонтална удаљеност до почетног положаја је $x = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}}$. Укупно време које је потребно да се лоптица врати у почетни положај: $t = t_1 + \frac{x}{v_1} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \frac{M}{M-m}$ [2п].
- (б) Како је сила нормалне реакције једина сила која делује у систему, осим гравитације, рад који она изврши над лоптом, односно над блоком, можемо израчунати као промену енергије појединачних тела. [2п]. $A_{Nl} = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{2}mv^2$ [2п], $A_{Nb} = \frac{1}{2}Mv_x^2$ [2п]. Коришћењем резултата из претходног дела задатка, одређујемо да је: $A_{Nl} = -\frac{Mm^2v^2}{2(m+M)^2}$ и $A_{Nb} = \frac{Mm^2v^2}{2(m+M)^2}$ [2п]. Како је сила нормалне реакције унутрашња сила, њен укупни рад једнак је нули.
3. а) Применимо прво метод ликова у односу на хоризонталну плочу. Добијамо лик на положају $(x, -y)$ са наелектрисањем $q_1 = -q$. Сада применимо метод ликова на почетно наелектрисање и добијени лик. Добијамо још два лика: $q_2 = -q$ у тачки $(-x, y)$ и $q_3 = q$ у тачки $(-x, -y)$ [3п]. Сила којом плоче делују на почетно наелектрисање може се одредити као векторски збир Кулонових сила којима наелектрисања q_1, q_2, q_3 делују на наелектрисање q . Интензитети сила којом ликови q_1, q_2 делују на q су: $F_1 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 y^2}$ [1п], $F_2 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x^2}$ [1п], а правац и смер свих сила су као на слици 1. Компоненте силе којом q_3 делује на q дуж x и y правца су: $F_{3x} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0(x^2+y^2)} \cos \phi = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0(x^2+y^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $F_{3y} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0(x^2+y^2)} \sin \phi = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0(x^2+y^2)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ [0,5+0,5п]. Компоненте резултујуће силе су: $F_x = F_{3x} - F_2 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right)$ [1п] и $F_y = F_{3y} - F_1 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \right)$ [1п].



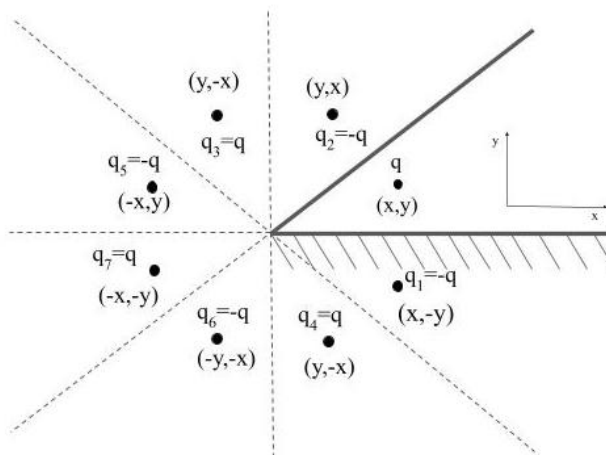
Слика 1: уз задатак 3 а).

- б) Наелектрисања ликова као и њихови положаји су као на слици 2.

Бодовање:

Наелектрисања: 4 тачна=2п; 5 тачних=2,5п; 6 тачних=3п; 7 тачних=4п.

Положаји: 4 тачна=3п; 5 тачних=4п; 6 тачних=5п; 7 тачних=6п.



Слика 2: уз задатак 3 б).

- в) Потребна нам је бесконачна секвенца ликова наелектрисања. Наиме, прво нађемо лик наелектрисања у односу на једну плочу (леву на пример) а затим нађемо лик почетног наелектрисања и првог лика у односу на десну плочу. Понављањем поступка за новодобијене ликове добијемо бесконачну секвенцу ликова. [1+1п (тачан одговор+образложење)].