15. СРПСКА ФИЗИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКА 2021/2022. ГОДИНЕ.

Друштво физичара Србије и Министарство просвете науке и технолошког развоја Републике Србије

8. и 9. јун 2022.
Нови Сад

ТЕОРИЈСКИ ЗАДАЦИ

Задатак 3
Модели атома и интеракција са спољашњим магнетним пољем [10п]

Задатак 3.1 – Томсонов модел атома[2,5п]

Томсон је моделовао атом водоника сматрајући газапремински равномерно наелектрисаном куглом наелектрисања $+e$ и радијуса $R=5,3\,\mathrm{nm}$.Унутар кугле се налази негативно тачкасто наелектрисање, тј. електрон, наелектрисања $-e$, Слика 3.1. Електрон може да осцилује око центра кугле. Према класичној електродинамици, фреквенција осциловања електрона је једнака фреквенцији електромагнетног таласа који емитује овакав систем. Одредити фреквенцију и таласну дужину овако емитованог електромагнетног зрачења. Маса електрона износи $m=9,1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$, релативна диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, елементарно наелектрисање $e=1,6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$, а брзина светлости у вакууму $c=3\cdot10^{8}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Слика 3.1 Томсонов модел атома

Задатак 3.2. Боров модела атома са језгром коначне масе[3,5п]

Део а)[2,5п] Томсонов модел није могао да репродукује спектралне линије атома водоника, што је довело до развоја Боровог модела. Бор је полазећи од својих постулата одредио енергију основног стања атома водоника. У свом моделу претпоставио је да је језгро, тј. протон бесконачне масе. Како језгро водоника има коначну масу, извести израз за енергију електрона у атому водоника и израчунати енергију основног и првог побуђеног стањаизражену у јединицама eV. Маса електрона износи $m=9,10938\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}$,маса протона је $M=1,67262\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$, елементарно наелектрисање $e=1,60217\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}$, релативна диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0=8,85418\cdot10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ и вредност Планкове константа је $h=6,62607\cdot10^{-34}\,\mathrm{Js}$.

Део б)[1п] Стриктно поштујући законе физике, фотон не може однети сву енергију прелаза, при деексцитрацији електрона из првог побуђеног у основно стање (разматрамо Боров модел атома са језгром коначне масе). За колико се процентуално разликује енергија емитованог фотона од енергије датог прелаза?Маса атома водоника износи $M_{\mathrm{H}}=1,00784\,\mathrm{u}$, где је $\mathrm{u}=1,660539\cdot10^{-27}\,\mathrm{kg}$ атомска јединица масе, а брзина светлости у вакууму $c=2,99792\cdot10^{8}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

ТЕОРИЈСКИ ЗАДАЦИ

Задатак 3.3[4п]

Део а)[2,5п] Паралелно са Томсоновим радом, Земан је проучавао утицај спољашњег магнетног поља на атом. У појединим случајевима (нормални Земанов ефекат) овај ефекат се може описати законима класичне механике, моделовањем атома хармонијским осцилатором у простору. Привлачна центрипетална сила је иста у свим правцима (гледајући из равнотежног центра око којег се осцилације врше) за дато растојање од равнотежног центра и осцилатор има одређену равнотежну кружну учестаност ω_0 при кретању дуж x, y и z праваца. Када атом уведемо у спољашње магнетно поље индукције $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ долази до цепања спектралних линија на више компоненти, као последица промене сопствене кружне учестаности хармонијских осцилацијауслед утицаја спољашњег магнетног поља. Овај ефекат је познат као Земанов ефекат. Како је кретање електрона у магнетном пољу хармонијско и може се описати хармонијским осцилацијама ($x = \cos\omega t$, $y = \sin\omega t$) одредити својствене (могуће) кружне учестаности у присуству спољашњег магнетног поља. У крајњем изразу за кружну учестаност узети у обзир да у случају оптичких прелаза атома Ларморова фреквенција $\Omega_{\mathrm{L}} = \dfrac{eB}{2m}$задовољава услов $\Omega_{\mathrm{L}} << \omega_0$.

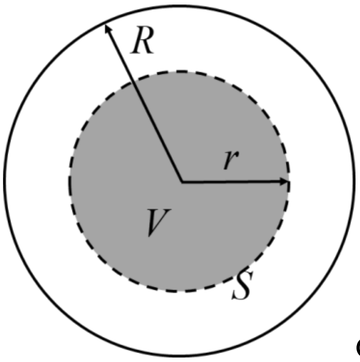
Део б)[1,5п] На основу својствених кружних учестаности, одредити својствене векторе $\vec{r} = (x, y, z)$ који описују хармонијске осцилације (тј. осцилације електрона).
Без присуства спољашњег магнетног поља посматрач опажа линију атома водоника $\lambda = 656,279\,\mathrm{nm}$. Које таласне дужине види (узимајући у обзир цепање дате линије без поља) посматрач који се налази негде дуж z-осе, а које посматрач који се налази у xOy равни уколико се атом водоника постави у спољашње магнетно поље индукције интензитета $B = 1\mathrm{T}$? Брзина светлости у вакууму износи $c = 2{,}997 \cdot 10^8 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, а елементарно наелектрисање је $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Задатак припремио: др Момир Арсенијевић, ПМФ Крагујевац
Задатак рецензирао: др Ненад Стевановић, ПМФ Крагујевац
Председник комисије: Проф. др Имре Гут, ПМФ Нови Саф

Решење Теоријског задатка 3[10п]

Решење Задатка 3.1[2,5п]

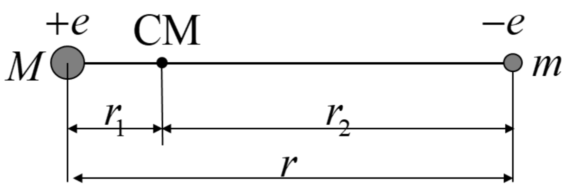
Крећући се унутар позитивно наелектрисане кугле, на електрон делује електрична сила $\vec{F} = -e\vec{E}$. Једначина кретања електрона је $m\vec{a} = \vec{F}$, тј. $m\vec{a} + e\vec{E} = 0$ **[0,6п]**. Потребно је одредити електрично поље унутар равномерно наелектрисане кугле. Према Гаусовој теореми $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV$, где је $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$, електрични померај, а $\rho = \dfrac{e}{\frac{4}{3}R^3\pi}$ **[0,2п]**је запреминска густина наелектрисања која је константна.Са слике Р3.1, електрично поље на растојању r унутар кугле је $E = E(r)$ такво да $\varepsilon_0 E\oiint_S ds = \rho\int_V dV$, тј. $\varepsilon_0 E4\pi r^2 = \dfrac{3e}{4R^3\pi}\dfrac{4}{3}r^3\pi$. Добија се $E = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}r$, тј. $\vec{E} = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}$ **[1п]**. Једначина кретања сада гласи $m\ddot{\vec{r}} + \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r} = 0$ **[0,1п]**, тј. $\ddot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = 0$, где је $\omega^2 = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}$ **[0,2п]**. Како је $\omega = 2\pi\nu$ кружна учестаност осцилација електрона, она одговара датој фреквенцији ЕМ зрачења, којаизноси $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}} \approx 6,6\cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ **[0,1+0,1п]**. Датој фреквенцији одговара таласна дужина од $\lambda = \dfrac{c}{\nu} \approx 45,47\,\mu\mathrm{m}$ **[0,1+0,1п]**. Ова таласна дужина се не појављује у спектру атома водоника.



Слика Р3.1

Решење Задатка 3.2[3,5п]

Део а)[2,5п]Услед међусобне интеракције електрон и језгро ротирају истом угаоном брзином ω око заједничког центра маса, Слика Р3.2. У систему центра маса важи $Mr_1 = mr_2$, као и $r = r_1 + r_2$, одакле долазимо до израза $r_1 = \dfrac{mr}{m+M}$ **[0,2п]**и $r_2 = \dfrac{Mr}{m+M}$ **[0,2п]**. Кинетичка енергија система је $T = \dfrac{Mr_1^2\omega^2}{2} + \dfrac{mr_2^2\omega^2}{2}$ **[0,2п]**, тј. $T = \dfrac{mM}{m+M}\dfrac{\omega^2 r^2}{2}$ **[0,2п]**. Потенцијална енергија система је $E_p = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r}$ **[0,2п]**.Укупна енергија је сума кинетичке и потенцијалне $E = T + E_p$ **[0,1п]**. За електрон можемо записати услов равнотеже кружног кретања $mr_2\omega^2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2}{r^2}$ **[0,4п]**. Комбиновањем изразра за кружно кретање и укупну енергију долазимо до релације $E = -\dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}\omega^2 r^2$ **[0,2п]**. На основу квантованости момента импулса $L = n\hbar$ **[0,2п]**, $\left(Mr_1^2 + mr_2^2\right)\omega = n\hbar$, долазимо до релације $\frac{mM}{m+M}r^2\omega = n\hbar$ **[0,2п]**и заменом у израз за укупну енергију, долазимо до траженог израза за енергију која зависи од квантног броја n, $E_n = -\frac{1}{8}\frac{mM}{m+M}\frac{e^4}{\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$ **[0,2п]**. Израз $\mu = \frac{mM}{m+M}$ представља редуковану масу система електон + језгро (протон). Енергија основног стања износи $E_1 = -\frac{1}{8}\frac{mM}{m+M}\frac{e^4}{\varepsilon_0^2 h^2} = -13{,}598137\ \mathrm{eV}$ **[0,1п]**, док је енергија првог побуђеног стања $E_2 = -\frac{1}{32}\frac{mM}{m+M}\frac{e^4}{\varepsilon_0^2 h^2} \approx -3{,}399534\,\mathrm{eV}$ **[0,1п]**.



Слика P3.2

Део б)[1п] На основу З.О.Е. $h\nu + \frac{M_{\mathrm{H}}\vartheta^2}{2} = E$ **[0,2п]**, где је $E = E_2 - E_1$ **[0,1п]**и З.О.И. $\frac{h\nu}{c} = M_{\mathrm{H}}\vartheta$ **[0,2п]**.Комбинујући изразе за законе одржања долазимо до квадратне једначине $\left(h\nu\right)^2 + 2M_{\mathrm{H}}c^2 \cdot h\nu - 2M_{\mathrm{H}}c^2E = 0$ **[0,2п]**. Физички смисао има позитивно решење $h\nu = M_{\mathrm{H}}c^2\left(\sqrt{1+\frac{2E}{M_{\mathrm{H}}c^2}} - 1\right) = 10{,}1986029\,\mathrm{eV}$ **[0,1п]**Релативна разлика изражена у процентима износи $\delta_{\%} = \frac{\Delta E}{E}\cdot 100\% = \frac{E - h\nu}{E}\cdot 100\% \approx 10^{-6}\%$ **[0,2п]**.

Решење 3.3[4п]

Део а)[2,5п]У случају спољашњег поља једначина кретања електрона је $m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2\vec{r} - e\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$ **[1п]**, где је први члан на десној страни центрипетална сила увек усмерена ка центру, а други члан је Лоренцова сила којом магнетно поље делује на електрон. Једначину можемо трансформисати у облик $\ddot{\vec{r}} + 2\Omega_{\mathrm{L}}\dot{\vec{r}}\times\vec{e}_z + \omega_0^2\vec{r} = 0$, где је Ω_{L} Ларморова учестаност дефинисана поставком задатка. У развијеној форми гласи једначина је облика

$$\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z + 2\Omega_{\mathrm{L}}\left(-\dot{x}\vec{e}_y + \dot{y}\vec{e}_x\right) + \omega_0^2\left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) = 0 .$$

Скаларне једначине су

$$\ddot{x} + 2\Omega_{\mathrm{L}}\dot{y} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{y} - 2\Omega_{\mathrm{L}}\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \ \textbf{[0,5п]}$$

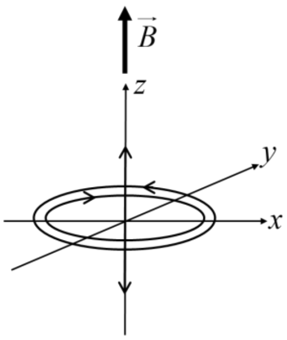
$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

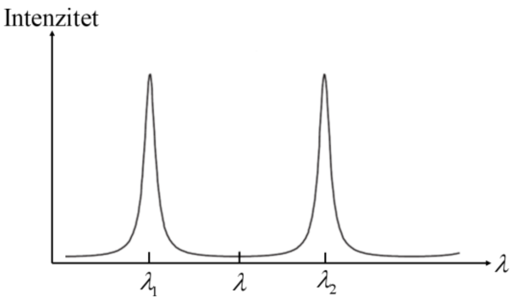
На основу треће једначине можемо закључити да по z оси не долази до промене кружне учестаности, тј. $\omega = \omega_0$. Како би одредили кружне учестаности које задовољавају прве две једначине заменимо изразе $x = \cos\omega t$, $y = \sin\omega t$ у једначине. Долазимо до израза $\omega^2 - 2\Omega_{\mathrm{L}}\omega - \omega_0^2 = 0$ **[0,4п]**, чије је решење $\omega_{1,2} = \Omega_{\mathrm{L}} \pm \omega_0$ (узимајући у обзир дату апроксимацију у поставци задатка). Тако долазимо до могућих вредности кружних учестаности којим електрон осцилује у присуству поља $\omega_1 = \omega_0 + \Omega_{\mathrm{L}}$ **[0,2п]**, $\omega_2 = -\left(\omega_0 - \Omega_{\mathrm{L}}\right)$ **[0,2п]** и $\omega_3 = \omega_0$ **[0,2п]**.

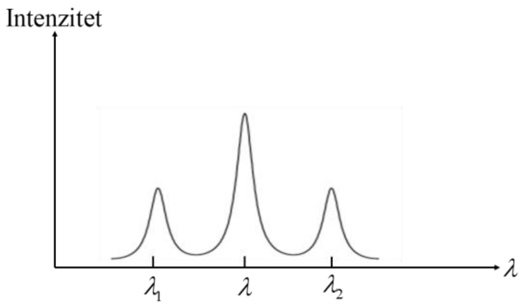
Део б)[1,5п]Својствене векторе можемо добити заменом својствених кружних учетаности. ω_1 и ω_2 задовољавају прве две скаларне једначине, а ω_3 трећу, одакле следи $\vec{r}_1 = \left(\cos\left(\omega_0 + \Omega_{\mathrm{L}}\right)t,\, \sin\left(\omega_0 + \Omega_{\mathrm{L}}\right)t, 0\right)$ **[0,2п]**, $\vec{r}_1 = \left(\cos\left(\omega_0 - \Omega_{\mathrm{L}}\right)t,\, -\sin\left(\omega_0 - \Omega_{\mathrm{L}}\right)t, 0\right)$ **[0,2п]**и $\vec{r}_1 = \left(0,\, 0, \cos\omega_0 t\right)$ **[0,2п]**.

Прва два својствена вектора одговарају осцилацијама у xOy равни, у супротним смеровима, док трећа одговара осцилацији дуж z - осе са непромењеном кружном учестаности, Слика P3.3.

Због тога посматрач гледано са тачке на z-оси види зрачење два спрегнута дипола у xOy равни (кружно поларизовани талас) чије су кружне учестаности $\omega_0 \pm \Omega_{\mathrm{L}}$, Слика Р3.3. Посматрач у xOy равни види осцилације дипола (линеарно поларизован талас) који зрачи кружном учестаношћу ω_0 и зрачење учестаности $\omega_0 \pm \Omega_{\mathrm{L}}$ (линеарно поларизоване) Слика Р3.5.







Слика Р3.3Слика Р3.4 Слика Р3.5

Сопствена кружна учестаност без спољашњег поља одговара водониковој линији $\lambda = 656{,}279\,\mathrm{nm}$ и једнака је $\omega_0 = \dfrac{2\pi c}{\lambda}$. Посматрач дуж z-осе види две таласне дужине $\lambda_1 = \dfrac{2\pi c}{\omega_0 + \Omega_{\mathrm{L}}} = 656{,}259\,\mathrm{nm}$ и $\lambda_2 = \dfrac{2\pi c}{\omega_0 - \Omega_{\mathrm{L}}} = 656{,}299\,\mathrm{nm}$ **[0,4п]**(за обе таласне дужине). Посматрач у xOy равни види таласне дужине $\lambda_1 = 656{,}259\,\mathrm{nm}$, $\lambda = 656{,}279\,\mathrm{nm}$ и $\lambda_2 = 656{,}299\,\mathrm{nm}$ **[0,5п]**(за све три таласне дужине).