РЕШЕЊЕ – ЗАДАТАК 1

Део А:

(а) Ово је стандарни проблем у магнетостатици. Применимо Био-Саваров закон на разматрану тачку на оси удаљеној z од центра. За мали елемент струјне контуре имамо $\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_0 I}{4r^2\pi}(\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{e_r})$, где је $r = \sqrt{z^2 + R^2}$удаљеност елемента од тачке, $\boldsymbol{dl}$ мали вектор који има правац уз струјну контуру и интензитет елемента дужине контуре, а $\boldsymbol{e_r}$ радијални орт који показује од елемента контуре ка разматраној тачки **[0,25п].** Можемо приметити да се за сваки елемент контуре сабирају елементи индукције у z правцу, док се у свим осталим правцима поништавају због симетрије. Узимајући ово у обзир, и проширавањем векторског производа, имамо $dB_z = dB = \frac{\mu_0 I}{4(z^2+R^2)\pi}\frac{R}{\sqrt{z^2+R^2}}dl$ **[0,25п],** те интеграљењем обе стране имамо $B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$ **[0,25п].** За $z{>>}R$ се у имениоцу губи члан са полупречником, те је $B = \frac{\mu_0 IR^2}{2}\frac{1}{z^3}$ **[0,25п].** Значајно је да је индукција на истој удаљености са обе стране контуре истог и интензитета и смера, иако формула то не наглашава.

(б) Општи израз за магнетни момент планарне струјне контуре гласи $m = IS$, где је S површина контуре. Стога за нашу контуру важи $m = IR^2\pi$ **[0,25п].**

(в) Укупна магнетна индукција увек је суперпозиција индукција од појединачних „намагнетисања“. Одавде имамо да је на траженој удаљености $B = C\frac{q_m}{\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - C\frac{q_m}{\left(z+\frac{d}{2}\right)^2} = Cq_m\frac{2dz}{\left(z^2-\frac{d^2}{4}\right)^2} = 2Cm\frac{z}{\left(z^2-\frac{d^2}{4}\right)^2}$ **[0,75п].** За $z{>>}\ d$се у имениоцу губи члан са удаљеношћу монопола, те је $B = 2Cm\frac{1}{z^3}$ **[0,25п].** Значајно је да је индукција на истој удаљености са обе стране дипола истог и интензитета и смера, иако формула то не наглашава.

(г) Имамо $2Cm\frac{1}{z^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2}\frac{1}{z^3}$ и $m = IR^2\pi$ **[0,25п].** Уврштавањем другог израза у први, потом скраћивањем чланова имамо да је $C = \frac{\mu_0}{4\pi}$ **[0,15п].** Може се уочити да је карактеристична константа магнетостатике, пермеабилност, у бројиоцу предфактора израза за индукцију, док је у случају електростатике пермитивност у имениоцу предфактора израза за електрично поље. Због овога је јачина магнетног поља дефинисана као количник индукције и пермеабилности, док је величина њој еквивалентна у електростатици, електрична индукција, дефинисана као производ електричног поља и пермитивности. Знајући вредност пермеабилности вакуума, наш предфактор има вредност од око 10^{-7}kg·m·s^{-2}·A^{-2} **[0,1п].** Из чињенице да се момент контуре и дипола могу изједначити могу се одредити диментије количине намагнетисања преко $[q_m]m = Am^2$, те је $[q_m] = Am$ **[0,25п].**

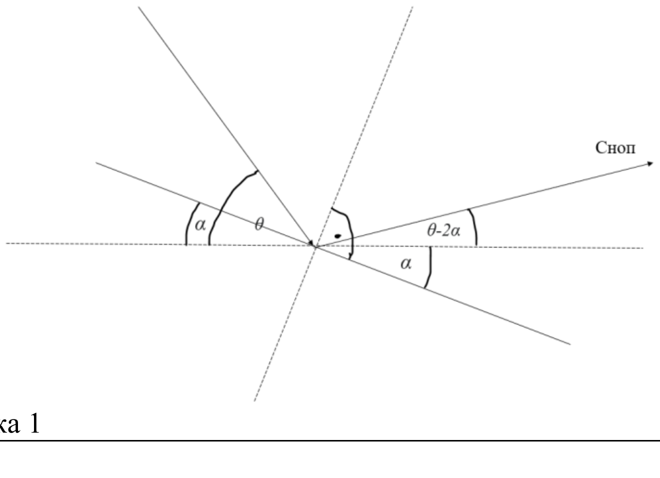
(д) Због слагања свих оријентација дипола може се закључити да се површинске струје по њиховим омотачима тотално поништавају, осим на површини омотача самог магнета. Овде за дужину магнета d по површини тече одговарајућа јачина струје I_0. Из овога се закључује да се цилиндрични магнет понаша као дугачки соленоид подужне струје на омотачу $j = \frac{I_0}{d}$**[0,5п].** Из овога и познатог израза за магнетну индукцију у средини соленоида имамо $B_{z=0} = \mu_0\frac{I_0}{d}$ **[0,25п].** Како су диполи јако уски, можемо поделити укупну струју $I = \frac{L}{d}I_0$ која тече кроз површину магнета на елементе, тако да је $dI_z = \frac{dz}{L}I$. Из израза из дела (а) имамо да је индукција коју ствара елемент $dB = \frac{\mu_0 R^2}{2}\frac{1}{z^3}dI_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2L}\frac{dz}{z^3}$ **[0,25п].** Интеграљењем имамо $B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2L}\int_{z-\frac{L}{2}}^{z+\frac{L}{2}}\frac{dz}{z^3} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2L}\left(\frac{-1}{2\left(z+\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{1}{2\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}\right) = \frac{\mu_0 R^2 I}{4L}\frac{2Lz}{(z^2-\frac{L^2}{4})^2} = \frac{\mu_0 R^2 LI_0}{2d}\frac{z}{(z^2-\frac{L^2}{4})^2}$**[0,75п].** За $z{>>}L$ се губи члан са дужином магнета у имениоцу, те је $B = \frac{\mu_0 R^2 LI_0}{2d}\frac{1}{z^3} = \frac{\mu_0 R^2 Lm_0}{2d^2}\frac{1}{z^3}$ **[0,25п].**

(ђ) Можемо приметити да се доприноси индукцији супротних монопола поништавају јер се њихове одговарајуће стране коцки поклапају због истоветне оријентације дипола. Једине „количине намагнетисања“ које се не поништавају су оне на основама магнета. Њихова укупна апсолутна вредност износи $q_m = \frac{R^2\pi}{d^2} q_{m0}$ **[0,5п].** Овај магнет је тако у суштини само „један" дипол ефективног магнетног момента $m_{eff} = q_m L$. Одатле је $B = \frac{\mu_0 m_{eff}}{2\pi}\frac{1}{z^3} = \frac{\mu_0 R^2 L q_{m0}}{2d^2}\frac{1}{z^3}$ **[0,25п].** Изједначавањем са изразом за индукцију из прошлог дела задатка, добијамо израз $q_{m0} = I_0 d$, који након множења са дужином ивице коцке гарантује управо да су диполи еквивалентни **[0,25п].**

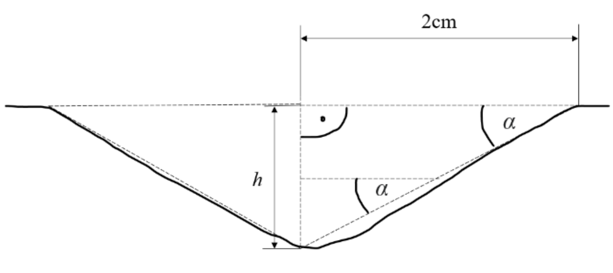
Део Б:

(а) Јачина магнетног поља изнад површине течности је иста као унутар течности, те је $H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B^*}{\mu_0\mu_r}$. Одавде је индукција унутар течности $B^* = \mu_r B$ **[0,25п].** Процес деформације течности посматрајмо енергетски. Удубљивање течноси за неку вредност h има као последицу умањивање енергије магнетног поља у простору за вредност која је била у течности и потенцијалне енергије течности, те повећање за вредност у вакууму. Деформацијом за h на некој малој површини телности dS она промени елементарну запремину $dV=h\cdot dS$. Одавде из закона одржања енергије важи $\frac{B^2}{2\mu_0}h\cdot dS - \frac{B^{*2}}{2\mu_0\mu_r}h\cdot dS - dS\cdot h\rho g h = 0$ **[0,75п].** Скраћивањем и уврштавањем индукције за течност имамо $h = \frac{B^2}{2\rho g\mu_0}(1-\mu_r)$ **[0,1п].** За воду овај израз има вредност 20,3μm, те је удубљење оволико **[0,2п].** Ако уместо воде разматрамо раствор мангана, добијамо -12,7μm, те је површина сада заправо испупчена **[0,2п]**!

(б) На заклону се примећују различити размаци због разноликог нагиба удубљења. Магнетно поље слаби уз тангенцијално уз површину течности, те се смањује и удубљење гледано у овим правцима. Приложен је јако мали број тачака међутим процена удубљења је и даље могућа. Знајући да је удубљење широко око четири центиметра, и да је на овим позицијама вредност z једнака 180cm, можемо одредити угао под којим ласер испаљује светлост. На овим позицијама нема нагиба због удубљења, те је угао између рефлектованог ласера и површине течности једнак углу под којим ласер испаљује светлост. Имамо $tg(\theta) = \frac{(180cm)}{L}$, те је $\theta = arctg\left(\frac{1{,}8}{4}\right) = 24{,}2°$ **[0,25п].** На позицијама где је z једнако 178cm и 182cm се оно разликује од вредности мировања од 180cmзбог нагиба течности. Видети слику 1. Ако је нагибни угао течности у некој тачки α, тада је угао између одбијеног снопа и хоризонтале због закона рефлексије једнак $\theta + 2\alpha$ **[0,25п].** Одавде за наше две симетричне измештене тачке важи $tg(\theta + 2\alpha) = \frac{z}{L}$, и одавде добијамо нагибне углове α_{178}=-0,105° и α_{182}=0,133°. Знамо да су ове две тачке симетричне, те би нагибни углови требали бити супротни. Може се наслутити да разлика настаје због експерименталне грешке и осетљивости инструмента за мерење измештаја на заклону, те можемо усредњити апсолутне вредности ових углова, те добијамо α=0,119° **[0,5п].** Како су ове две тачке на половини удаљености до краја ширине деформације (обе на по 1cmод центра), њих можемо апроксимирати као тачке највећег нагиба: видети слику 2. Из вредности измештања на заклону тачке у центру деформације закључујемо да и она нема нагиб, но деформацију апроксимирамо ипак као два правоугла троугла као на слици због малог броја тачака. Из геометрије слике закључујемо да је удубљење отприлике $h = (2cm)\cdot tg(0{,}119°) = 41{,}5\mu m$ **[0,5п].**

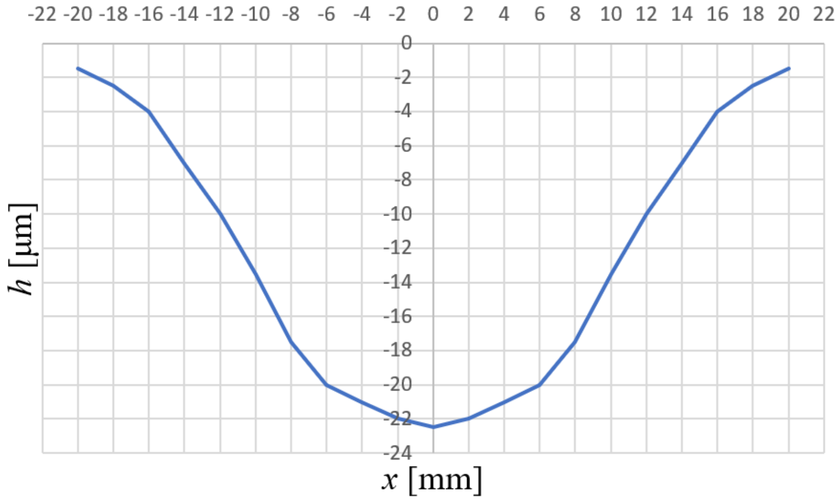


Слика 1



Слика 2

(в) Ова метода наизглед даје најосетљивије резултате. Путна разлика у односу на недеформисану течност једнака је управо апсолутној вредности величине удубљења: $\frac{2\pi}{\lambda}(-h(x)) = 2\pi\varDelta N(x)$, те је $h(x) = -\lambda\varDelta N(x)$ **[0,5п].** Тражени график је трансформација датог, и то рефлексија у односу на *x* осу, те скалирање за таласну дужину ласера. Минимум (и највеће удубљење) износи око -22,5μm за *x*=0, док су превојне тачке на око x=±10cm и износе -13,5μm. График је приказан на слици 3 **[0,5п].**



Слика 3

Решење припремио: Јован Марковић; Масачусетски Институт за Технологију