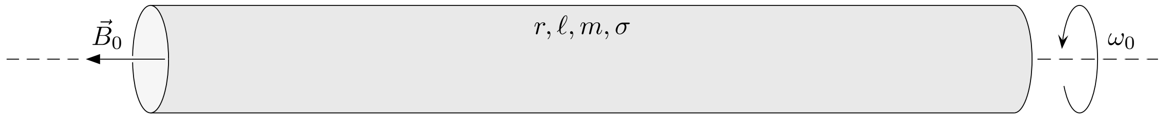
III разред

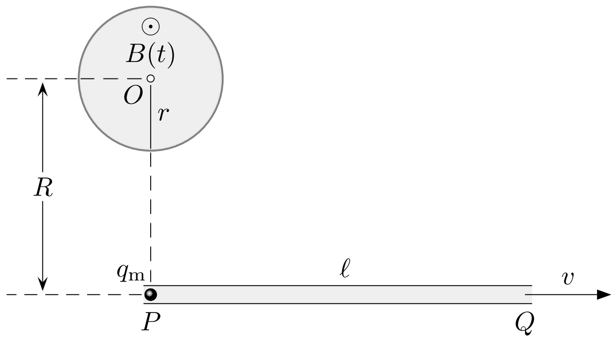
Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ – БЕТА КАТЕГОРИЈА

Параћин
9-10. мај 2026.

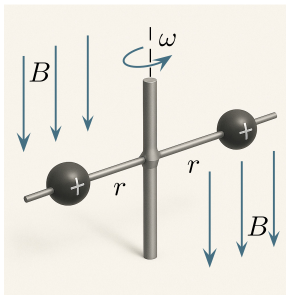
1. Шупљи хомогени цилиндар екстремно танких непроводних зидова, масе m, радијуса r, и велике дужине ℓ ($\ell \gg r$), може слободно да ротира у вакууму око сопствене осе, као што је дато на слици. Цилиндар је равномерно наелектрисан непомичним наелектрисањем површинске густине $\sigma > 0$ по свом ободу. Одредити угаону брзину ω_0 којом ротира цилиндар ако се у њему услед ротације формира хомогено магнетно поље индукције интензитета B_0. Видети одговарајуће смерове на слици. Сада, ако би се на цилиндар, противно смеру ротације, деловало моментом силе непознатог, али сталног интензитета $\mathcal{M}$, он би се зауставио за неко време τ рачунато од почетка кочења. Показавши да ће цилиндар равномерно успоравати до заустављања, одредите $\mathcal{M}$ у функцији од m, τ, r, ℓ, σ и B_0. Успоравањем цилиндра до заустављања уложен је известан рад споља. Показати да се вредност овог рада по модулу може записати као $\frac{1}{2}\left(\mathcal{I} + m_{\mathrm{em}} r^2\right)\omega_0^2$, где је $\mathcal{I}$ момент инерције цилиндра, док је $m_{\mathrm{em}} \equiv \mu_0 \pi \sigma^2 r^2 \ell$ ефективна величина која има јединицу масе, тзв. *електромагнетна маса*. Она је резултат појаве електричног поља индукованог по ободу цилиндра које се својим моментом сила противи кочењу цилиндра, односно смањењу магнетног флукса унутар цилиндра. Магнетна пермеабилност вакуума је позната и износи μ_0. Гравитационе ефекте занемарити. **(20 поена)**



2. У дугачком идеалном соленоиду полупречника r сконцентрисано је хомогено магнетно поље индукције чије се интензитет $B(t)$ може мењати у времену. Поље је усмерено дуж осе соленоида, O, као на слици. У равни која пресеца соленоид на половини његове дужине, на растојању $R > r$ од осе O у вакууму, постављена је уска права непроводна цев PQ, дужине $\ell = R\sqrt{3}$. У тачки P се налази наелектрисана честица позитивног специфичног наелектрисања $q_{\mathrm{m}} \equiv q/m$, која може неометано да клизи кроз цев, без трења, без електростатичког утицаја од стране цеви и без гравитације. Одредити брзину v честице у тренутку изласка из цеви у два случаја. Први, када $B(t)$ нагло опадне са вредности B_0 на нулу, током довољно кратког временског интервала тако да је померај честице занемарљиво мали за то кратко време у односу на дужину цеви. Други, када $B(t)$ постепено опада у времену са константним коефицијентом правца: $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = -k < 0$, и то током целог проласка честице кроз цев. **(20 поена)**

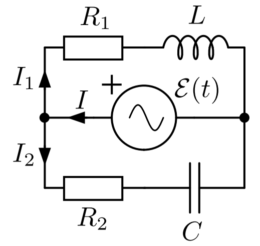


3. Две идентичне позитивно наелектрисане куглице у вакууму могу да проклизавају без трења дуж дугог хоризонталног електро-изолованог штапа који ротира око вертикалне осе у смеру као на слици. Оса је паралелна вектору индукције хомогеног магнетног поља које делује у смеру наниже. Циклотронска угаона фреквенција обе куглице у овом магнетном пољу је позната и износи ω_{c} ($\omega_{\mathrm{c}} \equiv q_{\mathrm{m}} B$, где је $q_{\mathrm{m}} \equiv q/m$ специфично наелектрисање куглице, а B интензитет вектора индукције магнетног поља). Електростатичка интеракција између наелектрисаних куглица је присутна, за разлику од узајамног магнетног деловања које се занемарује. Током ротације куглице могу да успоставе стање статичке равнотеже када су подједнако удаљене од осе ротације. Минимална вредност тог растојања, и једне и друге куглице од осе ротације, за које је таква равнотежа могућа износи $r_{\min}$. Величине ω_{c} и $r_{\min}$ сматрати познатим.



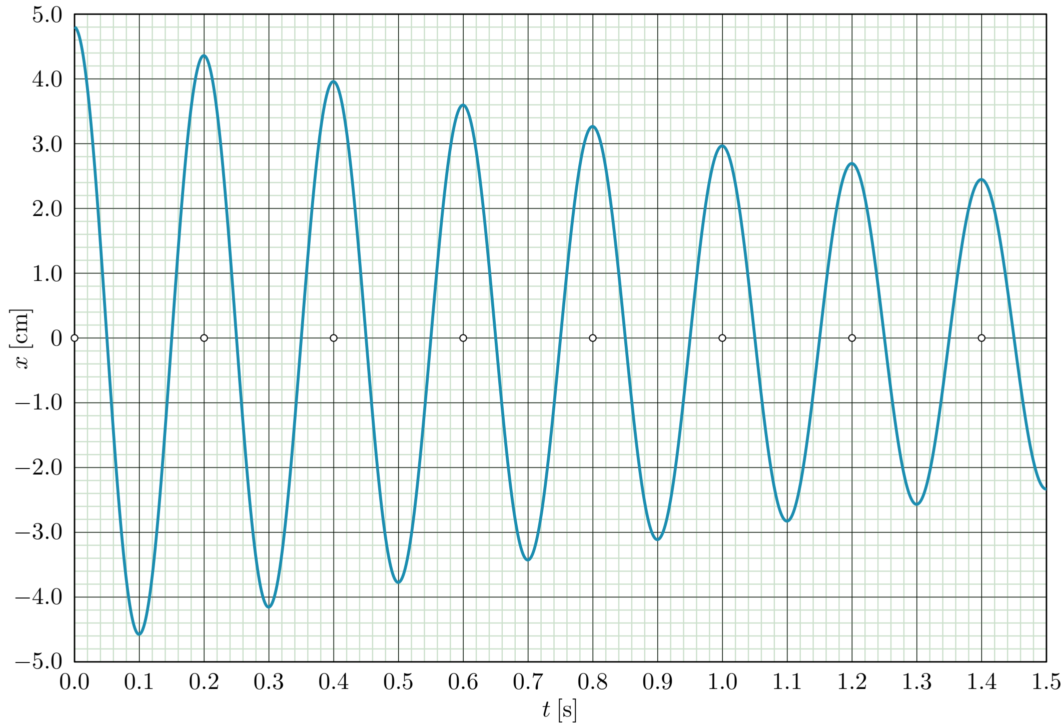
(а) При којим $\omega(r)$ угаоним брзинама ротације штапа се ова равнотежа успоставља за растојања r која су већа од или једнака $r_{\min}$? Ако је неопходно, решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ се налазе као $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где су a, b, $c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. **(14 поена)**

(б) Одредите $T(r)$ период малих осцилација куглица генерисаних осно-симетричним извођењем куглица из стања равнотеже на растојању $r \geq r_{\min}$ у односу на осу ротације. Уколико је потребно, користити $(1+\xi)^n \approx 1 + n\xi$ за $|\xi| \ll 1$, где су ξ, $n \in \mathbb{R}$. **(6 поена)**



4. У колу наизменичне струје са слике, електромоторна сила напонског генератора дата је у облику $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}\sqrt{2}\sin(\omega t)$, где је $\mathcal{E} > 0$ ефективна вредност електромоторне силе. Укупна електрична струја ефективне вредности I фазно предњачи у односу на електромоторну силу $\mathcal{E}$ за фазни угао $\theta = 30°$. Кружна учестаност наизменичног напона износи $\omega = 10^3\,\text{rad/s}$, а ефективне вредности јачина струја у гранама кола су међусобно једнаке, $I = I_1 = I_2 > 0$. Еквивалентна импеданса кола на прикључним изводима генератора износи $Z = 50\,\Omega$. Методом ротирајућих вектора, скицирати дијаграм фазора, тј. вектора: $\vec{I}$, $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ и $\vec{\mathcal{E}}$, замрзнутих у систему који ротира угаоном брзином ω, па одредити бројне вредности елемената кола: $R_1 \geq 0$, $R_2 \geq 0$, $L > 0$, и $C > 0$. Обратити пажњу да ознаке R_1 и R_2 на шеми кола могу означавати отпорнике ($R_{1,2} > 0$) или кратак спој ($R_{1,2} = 0$). **(20 поена)**

5. Посматрајмо зависности елонгације x слабо пригушеног механичког осцилатора од времена t. У почетном тренутку осцилатор је извучен из равнотежног положаја $x = 0$ и пуштен без почетне брзине. Пригушење вискозне средине у којој се налази осцилатор је довољно слабо да се нулта амплитуда $A(0)$ подудара са почетним положајем $x(0)$, као и да се период осциловања у вискозној средини практично не разликује од периода слободних осцилација. На графику су сви временски подаци (t-оса) изразито прецизни и могу се очитавати без апсолутне грешке, док се бројне вредности елонгације x на ординати очитавају са апсолутном грешком једнакој половини најмањег подеока дате скале. По пуштању осцилатора ($t = 0$), он прође кроз равнотежни положај, врати се назад, и након прве осцилације досегне нижу амплитуду $A(1)$, и тако редом за $n = 2, 3, \ldots$, закључно са седмом осцилацијом ($n = 7$),



након које нам кретање осцилатора није од интереса. Испоставља се да се управо у овом случају, $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, амплитуда осцилатора $A(n)$ приближно понаша по закону:

$$A(n) = \frac{x(0)}{1 + \pi n/Q},$$

где је Q тзв. фактор доброте/каквоће. Очитавајући неопходне бројне вредности са графика $x(t)$ и скицирајући и анализирајући одговарајући график линеарне зависности, проценити бројну вредност Q-фактора и интервал његове апсолутне грешке. Даље, по егзактној теорији, амплитуда пригушеног осцилатора опада у времену по закону $A(t) = A(0)e^{-\beta t}$, где је β коефицијент пригушења вискозне средине. На основу апроксимације $e^{\xi} \approx 1 + \xi$ за $\xi \ll 1$, проценити бројну вредност β и интервал њене апсолутне грешке. **(20 поена)**

Сва решења јасно образложити. Израда задатака траје 240 минута.

Свим такмичарима желимо успешан рад!

Задатке припремили: *Данило Ђокић*, Електротехнички факултет, Београд; *Јанко Поповић*, Тринити колеџ, Кембриџ.
Рецензенти: *др Дејан Ђокић*, Институт за физику у Београду; *проф. др Ненад Стевановић*, ПМФ Крагујевац.
Председник комисије: *проф. др Имре Гут*, Департман за физику, Нови Сад.