



### III разред

Друштво физичара Србије и  
Министарство просвете Републике Србије  
РЕШЕЊА – БЕТА КАТЕГОРИЈА

Параћин  
9-10. мај 2026.

1. Мисаоно изделимо цилиндар по дужини на  $N_\ell \rightarrow \infty$  танких навојака, сваки екстремно мале дужине  $d\ell = \ell/N_\ell$ , а затим изделимо сваки навојак по ободу на  $N_\phi \rightarrow \infty$  делића, сваки лучно закривљен под врло малим углом  $d\phi = 2\pi/N_\phi$ . Ако цилиндар ротира тренутном угаоном брзином  $\omega(t)$ , наелектрисање  $\sigma \times (rd\phi d\ell)$  на ободу делића, који је готово правоугаони (површине  $rd\phi \times d\ell$ ), ће протећи за време  $dt = d\phi/\omega(t)$ . На тај начин јачина електричне струје која ефективно циркулише по ободу сваког навојка, а има их  $1/d\ell$  по јединици дужине, је  $di = \sigma r \omega(t) d\ell$  [4п]. У аналогiji са индукцијом магнетног поља идеалне завојнице налазимо да је  $B(t) = \mu_0 di/d\ell$ , па је  $\omega_0 = B_0/(\mu_0 \sigma r)$  [4п]. Даље, сада имамо кочични момент силе константног интензитета  $M$  који ће довести до угаоног успорења чија је тренутна вредност по модулу  $\alpha(t)$ . Његов ротациони смер је противан ротационом смеру тренутне угаоне брзине интензитета  $\omega(t)$  који опадне од  $\omega_0$  до 0 за време  $\tau$ . Међутим, по Ленцовом правилу, појавиће се момент силе који се противи паду тренутне вредности интензитета магнетне индукције унутар цилиндра.  $B(t)$  ће у сваком тренутку опадати у времену као  $\frac{dB}{dt} = \mu_0 \sigma r \frac{d\omega}{dt} = -\mu_0 \sigma r \alpha(t)$  [1п]. Из Фарадејевог закона електромагнетне индукције, по ободу једног навојка се формира индукована електромоторна сила  $-\frac{dB}{dt} \pi r^2 = \mu_0 \sigma \pi r^3 \alpha(t)$  у смеру којим ротира цилиндар, а која је последица циркулације индукованог електричног поља  $E_{\text{ind}}(t) \times 2\pi r$ , чији је интензитет  $E_{\text{ind}}(t) = \mu_0 \sigma r^2 \alpha(t)/2$  [1п]. Ово поље подједнако делује на сваки делић цилиндра по ободу у смеру ротације па је његов укупан момент:  $M_{\text{ind}}(t) = (2\pi r \ell \sigma) \times E_{\text{ind}}(t) r = \mu_0 \pi \sigma^2 r^4 \ell \alpha(t)$  и противи се смеровима  $M$  и  $\alpha(t)$  [2п]. Даље, по Другом Њутновом закону:  $\mathcal{I} \alpha(t) = M - M_{\text{ind}}(t)$ , где је  $\mathcal{I} = m r^2$  момент инерције цилиндра [2п]. Одавде се закључује да је  $\alpha(t) \equiv \alpha$  константно [2п] и износи  $\alpha = \omega_0/\tau = B_0/(\mu_0 \sigma r)$  [1п]. Такође, већ овде запажамо да је  $\mu_0 \pi \sigma^2 r^2 \ell \equiv m_{\text{em}}$ , јер је  $M = \frac{(m + \mu_0 \pi \sigma^2 r^2 \ell) B_0 r}{\mu_0 \sigma} = (m + m_{\text{em}}) r^2 \alpha$  [2п]. С друге стране, рад овог момента се троши на промену кинетичке енергије цилиндра ( $\mathcal{I} \omega_0^2/2$ ) и прираштај енергије магнетног поља ( $w_m \times \pi r^2 \ell$ ) чија је запреминска густина на почетку била  $w_m = B_0^2/2\mu_0$ , одакле заиста добијамо да је рад спољашњег кочичног момента  $\frac{1}{2} (\mathcal{I} + m_{\text{em}} r^2) \omega_0^2$  [1п]. *Напомена:* уколико такмичар није показао да је  $\alpha(t) \equiv \alpha = \text{const}$  (тј. само је то претпоставио), а сви остали резултати су му тачни, онда осваја максималних 90% од укупног броја бодова. Не признавати бодове за изразе до којих се дошло путем димензионе анализе.

2. Нека је  $m$  маса честице, а  $q > 0$  њено наелектрисање. У првом случају, узмимо кружну контуру  $\mathcal{C}_1$  радијуса  $R$  око соленоида у равни која садржи цев. Контура је оријентисана тако (математички циркулациони смер) да се њена оријентација поклапа са смером вектора магнетне индукције, у смислу правила десног завртња, те је магнетни флуks обухваћен овом контуром ненегативан и износи  $\Phi^{(\mathcal{C}_1)}(t) = \pi r^2 B(t)$  [2п]. Услед промене магнетног флуksа и осне симетрије контуре, на њој ће се индуковати електрично поље константне алгебарске вредности  $E_{\text{ind}}^{(\mathcal{C}_1)}$  које циркулише по ободу контуре, такво да је индукована електромоторна сила  $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{(\mathcal{C}_1)} = 2\pi R E_{\text{ind}}^{(\mathcal{C}_1)}$  [2п]. Према Фарадејевог закону електромагнетне индукције:  $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{(\mathcal{C}_1)} = -d\Phi^{(\mathcal{C}_1)}/dt = -\pi r^2 dB/dt$  [2п], те се смер циркулације индукованог електричног поља подударе са смером контуре, јер флуks опада. Нека је након једног кратког временског интервала,  $0 \leq t \leq \tau$ , тренутно  $B(t)$  опало са  $B_0$  на 0, док је интензитет тренутне брзине честице  $v(t)$  (у смеру  $P \rightarrow Q$ ) током овог интервала порастао са 0 на  $v$ . На тај начин, Други Њутнов закон записујемо као  $m \frac{dv}{dt} = q E_{\text{ind}}^{(\mathcal{C}_1)} = -\frac{q r^2}{2R} \frac{dB}{dt}$  [2п], што се на читавом интервалу преводи у  $2R(v - 0) = q_m r^2 (B_0 - 0)$ , па се за почетну брзину добија да је  $v = q_m B_0 r^2 / 2R$  [2п], што је уједно и стална брзина честице којом она излеће из цеви. У другом случају, узмимо кружну контуру  $\mathcal{C}_2$ , сада радијуса  $2R$ , око соленоида у равни која садржи цев. И ова контура је оријентисана тако (математички циркулациони смер) да се њена оријентација поклапа са смером вектора магнетне индукције, у смислу правила десног завртња, те је магнетни флуks обухваћен овом контуром ненегативан и износи  $\Phi^{(\mathcal{C}_2)}(t) = \pi r^2 B(t)$  [2п]. Радијус  $2R$  је узет, јер је  $|OQ| = 2R$ , будући да је  $\ell = R\sqrt{3}$ , тј.  $\angle POQ = \pi/3$ . Према Фарадејевог закону електромагнетне индукције, укупна индукована електромоторна сила дуж целе контуре је  $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{(\mathcal{C}_2)} = -d\Phi^{(\mathcal{C}_2)}/dt = -\pi r^2 dB/dt = k\pi r^2 > 0$  [2п], те се и овде смер циркулације индукованог електричног поља подударе са смером контуре. Даље, посматрајмо тетиву  $MQ$  на кружној контури радијуса  $2R$ , коју полови тачка  $P$ , а која се из центра  $O$  види под углом  $2\pi/3$ . Индуковани пад напона на луку  $MQ$  контуре је стога  $\mathcal{E}_{\text{ind}}^{(MQ)} = k\pi r^2/3$  [1п]. Исти пад напона се индукује и дуж тетиве  $MQ$ , јер се узимањем нове контуре која је ограничена поменутом тетивом и луком не обухвата никакво променљиво магнетно поље, па је због симетрије проблема пад напона на половини тетиве (тј. дуж саме цеви) двоструко мањи, тј.  $U_{PQ} = k\pi r^2/6$  [1п]. Овим напоном се из мировања убрзава наелектрисана честица, која по напуштању цеви добија кинетичку енергију  $mv^2/2 = qU_{PQ}$  [2п]. Напоследку,  $v = r\sqrt{q q_m k/3}$  [2п].



# III разред

Друштво физичара Србије и  
Министарство просвете Републике Србије  
РЕШЕЊА – БЕТА КАТЕГОРИЈА

Параћин  
9-10. мај 2026.

3. (а) Нека је  $q$  наелектрисање сваке куглице,  $m$  маса,  $B$  интензитет вектора индукције хомогеног магнетног поља, а  $k$  Кулонова константа у вакууму. Тада је, као што је напоменуто у формулацији задатка, циклотронска угаона фреквенција  $\omega_c = qB/m$ . У ненинерцијалном систему који ротира угаоном брзином  $\omega$ , куглице су уравнотежене са три силе: електростатичком  $F_e$  усмереном ка периферији, центрифугалном (фиктивна/инерцијална)  $F_{cf}$  која је такође усмерена ка периферији, и Лоренцовом  $F_m$  која је усмерена ка оси ротације. Нека су обе куглице уравнотежене на растојању  $r$  од осе. Услов равнотеже у систему који ротира гласи:  $F_{cf}(r) - F_m(r) + F_e(r) = 0$  [1п], где је  $F_{cf} = mr\omega^2$  [2п],  $F_m = qBr\omega$  [2п], и  $F_e = kq^2/(2r)^2$  [2п]. Даље, долазимо до квадратне једначине по  $\omega$ :  $\omega^2 - \omega_c\omega + \frac{kq^2}{4mr^3} = 0$  [2п], чија решења имају физичког смисла само ако је дискриминанта ненегативна, тј. ако је  $\omega_c^2 - \frac{kq^2}{mr^3} \geq 0$  [2п], па је  $\sqrt{\frac{kq^2}{m\omega_c^2}} \equiv r_{\min}$  [1п]. При  $r > r_{\min}$ , постоје два различита решења за угаону брзину која дово-

де до уравнотежавања куглица,  $\omega_{\pm}(r) = \frac{\omega_c}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^3} \right)$ , односно тачно једно  $\omega(r) = \omega_c/2$  за  $r = r_{\min}$  [2п].

(б) Период малих осцилација куглица налазимо при незнатном померању сваке куглице, рецимо ка периферији,  $r \rightarrow r + dr$  и проналажењем зависности екстремно мале нето силе  $dF(r) = F_{cf}(r + dr) - F_m(r + dr) + F_e(r + dr)$  у функцији од  $dr$  [2п]. Она делује ка периферији када је  $dF(r) > 0$ , тј. ка центру када је  $dF(r) < 0$ . Дакле, за оба решења  $\omega_{\pm}(r)$ :

$$dF_{\pm}(r) = m\omega_{\pm}(r)(\omega_{\pm}(r) - \omega_c)(r + dr) + \frac{kq^2}{4(r + dr)^2} = \frac{m\omega_c^2 r_{\min}^3}{4r^2} \left\{ - \left( 1 + \frac{dr}{r} \right) + \left( 1 + \frac{dr}{r} \right)^{-2} \right\},$$

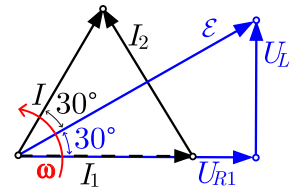
те је  $dF_{\pm}(r) \approx -\frac{3m\omega_c^2}{4} \left(\frac{r_{\min}}{r}\right)^3 dr \equiv -\kappa(r)dr$ , где је  $\kappa(r) > 0, \forall r \geq r_{\min}$ , што говори да је карактер ове силе повратан, тј. да она реституише равнотежни положај [2п]. Сходно томе, тражени период је  $T(r) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa(r)}} =$

$$\frac{4\pi}{\omega_c\sqrt{3}} \left(\frac{r}{r_{\min}}\right)^{3/2} \quad [2п].$$

4. На основу Кирхофовог закона за наизменичне струје, фазори струја  $\vec{I}$ ,  $\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$  морају формирати троугао [2п]. Пошто су ефективне вредности тих струја једнаке, тај троугао онда мора бити и једнакостраничан [2п], као што је илустровано на слици. Пошто  $\vec{\mathcal{E}}$  касни за угао  $30^\circ$ , фазор  $\epsilon_{mc}$ -а одговара симетралу једног угла тог једнакостраничног троугла као што је приказано на слици [2п]. Са дате слике може се приметити да струја  $\vec{I}_2$  предњачи за  $90^\circ$  [2п], па закључујемо да се грана  $R_2$ - $C$  понаша као кондензатор, те је  $R_2 = 0$  [2п]. Како је тада импеданса кондензатора  $\frac{1}{\omega C} = \frac{\mathcal{E}}{I_2}$  [2п], следи  $C = \frac{I}{\omega\mathcal{E}} = \frac{1}{\omega Z} = 20\mu\text{F}$  [2п].

С друге стране,  $\vec{I}_1$  касни за  $30^\circ$  у односу на  $\vec{\mathcal{E}}$ , па напони  $\vec{U}_{R1}$  и  $\vec{U}_L$ , калема и отпорника у грани 1, формирају правоугли троугао који представља половину једнакостраничног троугла, те важи  $U_{R1} = \frac{\mathcal{E}\sqrt{3}}{2}$  [1п] и  $U_L = \frac{\mathcal{E}}{2}$  [1п].

Одавде се налазе:  $R_1 = \frac{U_{R1}}{I_1} = \frac{\mathcal{E}\sqrt{3}}{2I} = \frac{Z\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\Omega \approx 43,3\Omega$  [2п] и  $\omega L = \frac{U_L}{I_1} \Rightarrow L = \frac{\mathcal{E}}{2\omega I} = \frac{Z}{2\omega} = 25\text{mH}$  [2п].





# III разред

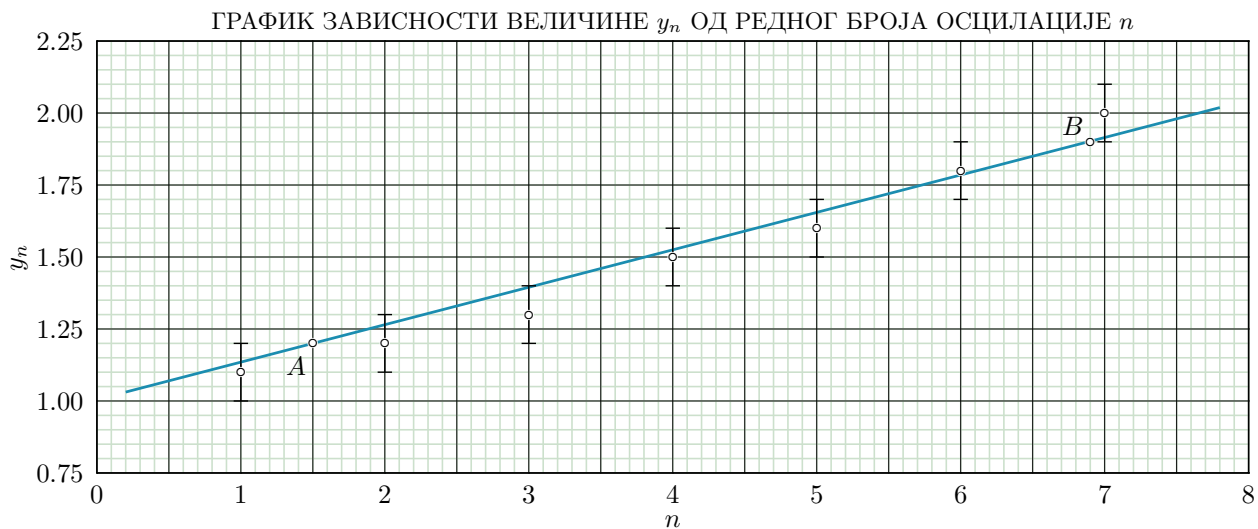
Друштво физичара Србије и  
Министарство просвете Републике Србије  
РЕШЕЊА – БЕТА КАТЕГОРИЈА

Параћин  
9-10. мај 2026.

5. Са графика зависности  $x(t)$  примећујемо да је апсолутна грешка којом се очитавају све амплитуде  $\Delta A(n) \equiv \Delta A = 0,1 \text{ cm}$  [1п], и да је период осциловања тачно  $T = 0,2 \text{ s}$  [1п]. Даље, погодно је скицирати линеарни график функције  $y_n = 1 + \kappa n$  [1п], где је  $y_n \equiv \frac{x(0)}{A(n)}$  [1п], а  $\kappa \equiv \frac{\pi}{Q}$  [1п]. За израз за апсолутну грешку  $y_n$  се добија да је  $\Delta y_n = \frac{\Delta A}{A(n)} (1 + y_n)$  [1п]. Очитавајући податке са графика зависности  $x(t)$  долазимо до следеће табеле са релевантним подацима за  $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$  [2п] у којој је  $\Delta y_n \equiv \Delta y = 0,1$  свуда заокружено ради униформности апсолутне грешке на линеарном графику функције  $y_n = 1 + \kappa n$ , јер  $\Delta y_n$  расте како  $n$  расте и почиње од око 0,05 за  $n = 1$  до око 0,12 за  $n = 7$ .

$n$	$(A(n) \pm \Delta A)$ [cm]	$y_n \pm \Delta y$
1	$4,4 \pm 0,1$	$1,1 \pm 0,1$
2	$4,0 \pm 0,1$	$1,2 \pm 0,1$
3	$3,6 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$
4	$3,2 \pm 0,1$	$1,5 \pm 0,1$
5	$3,0 \pm 0,1$	$1,6 \pm 0,1$
6	$2,6 \pm 0,1$	$1,8 \pm 0,1$
7	$2,4 \pm 0,1$	$2,0 \pm 0,1$

На основу података датих у табели скициран је график линеарне зависности бездимензионе величине  $y_n$  од редног броја осцилације  $n$  у седам тачака [3п].



Одабиром тачака  $A(1,5; 1,2)$  [1п] и  $B(6,9; 1,9)$  [1п] се за коефицијент правца добија да је  $\kappa = \frac{y_n^{(B)} - y_n^{(A)}}{n^{(B)} - n^{(A)}} = 0,1296\dots$  [1п], а  $\Delta \kappa = \frac{2\Delta y}{n^{(B)} - n^{(A)}} = 0,0371\dots$  [1п], па је  $\kappa = 0,13 \pm 0,04$  [1п]. Одавде је  $Q = \frac{\pi}{\kappa} = 24,2351\dots$ , а  $\Delta Q = \frac{\pi \Delta \kappa}{\kappa^2} = 7,4357\dots$  [1п], односно  $Q = 24 \pm 8$  [1п], што је далеко веће од 1 и што важи за слабо пригушене системе. Даље, на основу дате апроксимације у формулацији задатка,  $\beta = \frac{\kappa}{T}$  [1п], те је  $\beta = (0,6 \pm 0,2) \text{ s}^{-1}$  [1п], што је далеко мање од  $\frac{2\pi}{T} = 10\pi \text{ s}^{-1}$ .