ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2022/2023. ГОДИНЕ.

III РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

ОКРУЖНИ НИВО
18.03.2023.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - БЕТА КАТЕГОРИЈА

1. Наелектрисање који је изнад бесконачне металне плоче индукује у плочи наелектрисање, чије је поље идентично тачкастом наелекрисању супротног знака, који се налази на огледалски пресликаном месту иза плоче (слика 1.). Тако можемо бесконачну плочу заменити са два наелектрисања, $-q_1$ и $-q_2$ **[1п]**. На наелектрисање q_1 осим гравитационе силе и силе одбијања од друге куглице F_{12} делују и привлачне силе од два негативна „лика“ (F_{1-1} и F_{1-2}). Пошто се куглуце могу померати само вертикално, односно ротирати око ослонца О, услов равнотеже је да сви збирови момената које делују око тачке О буду једнаки нули. Силе F_{12} и F_{21} делују дуж штапа, тако да су им моменти нуле. Гравирациона и сила између наелектрисања и његовог лика F_{1-1} стоје нормално на крак силе и њихов момент силе се може израчунати у скаларном облику као крак пута сила. Са друге стране момент силе између остала два наелектрисања (наелектрисање и лик другог наелектрисања) F_{1-2} стоји под углом α у односу на нормалу. Њен момент се може израчунати као крак силе пута пројекција силе на нормалу, тј. множи се са $cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{20}}$ **[1п]**. Примећује се да су сви моменти једне куглице једног знака а друге супротног (односно прва куглица ротира теразије супротно а друга у правцу кретања сата) **[1п]**, док кракови сила се разликују по односу из задатка Момент са којим наелектрисање q_1 делује на осовину је $M_1 = 3d\left(mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1^2}{(2d)^2}\right) + 3d\frac{2}{\sqrt{20}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{(2d)^2+(4d)^2}$ **[3п]** а друго наелектрисање $M_2 = d\left(mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2^2}{(2d)^2}\right) + d\frac{2}{\sqrt{20}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{(2d)^2+(4d)^2}$ **[3п].** Уврштавањем услова за однос растојања и масе једначине постају: $M_1 = 3d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q_1^2+q_1^2}{4d^2}\right) + 3d\frac{2}{\sqrt{20}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{20d^2}$ **[2п]** и $M_2 = d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q_1^2+q_2^2}{4d^2}\right) + d\frac{2}{\sqrt{20}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{20d^2}$ **[2п]**. Из једнакости ове две једначине се добије (множи се са $4\pi\varepsilon_o \cdot d$) $\frac{15q_1^2}{4} + \frac{6q_1q_2}{20\sqrt{20}} = \frac{4q_1^2+q_2^2}{4} + \frac{2q_1q_2}{20\sqrt{20}}$ што се своди на квадратну једначину $q_2^2 - \frac{16q_1}{20\sqrt{20}}q_2 - 11q_1^2 = 0$ **[4п]**, чије је решење $q_2 = 39{,}8\,C$ **[1п]**. Ова једначина има и негативно решење за које обично кажемо да нема физичког смисла- оно износи $q_2 = -37{,}7\,C$ **[1п]**. У овом случају би наелектрисање q_2 било негативно, али у једнчинама би се променили смерови сила (предзнаци) које делују између два наелектрисања и првог наелектрисања и другог лика (пошто би сад то наелектрисање било позитивно). То зрчи да и ово решење има стварни физички смисао, једино се коси са основном претпоставком задатка, да су наелектрисања позитивна **[1п]**.

2. **I начин)** Импеданса гране са калемом износи $\bar{Z}_1 = R + j\omega L$, а гране са кондензаторомје $\bar{Z}_2 = R - j\frac{1}{\omega C}$. Укупна импеданса кола износи, $\bar{Z}_u = R + \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}$, односно, $\bar{Z}_u = R + \frac{(R+j\omega L)\left(R - j\frac{1}{\omega C}\right)}{2R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$. Јачина струје кроз извор ће бити минимална када је имагинарни део имениоца израза једнак нули, односно када је $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100\,\mathrm{s}^{-1}$, што је и услов за струјну резонанцију. У том случају важи да је укупна имепданса кола једнака $\bar{Z}_u = \frac{3R^2 + \frac{L}{C}}{2R} = 500001{,}5\,\Omega$. Ефективна вредност јачине струје кроз извор је једнака $i = \frac{U}{Z_u} = \frac{2R}{3R^2+\frac{L}{C}}U = 0{,}199\,\mathrm{mA}$.

Имајући у виду да је испуњен услов струјне резонанције, јачина струје кроз извор је у фази са напоном извора, па је укупан напон на паралелној грана једнак збиру *U-Ri₀.* Тада је ефективна вредност јачине струје у грани са кондензатором јендака $i_C = (U-Ri_0)/Z_2$. Однос јачина струја је

$$\frac{i_C}{i} = \frac{\frac{U-Ri}{Z_2}}{i} = \frac{\frac{U}{i} - R}{Z_2} = \frac{\frac{3R^2+\frac{L}{C}}{2R} - R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = \frac{R^2+\frac{L}{C}}{2R\sqrt{R^2+\frac{L}{C}}} = 500\,.$$

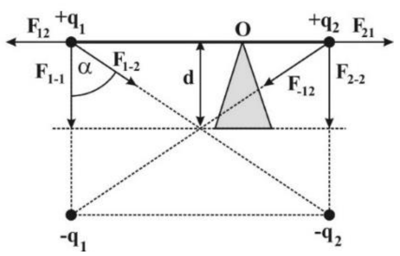
II начин) Фазорски дијаграм за грану у којој се налази калем приказан је на слици а) **[2п]**, где је U_L ефективна вредност напона на калему, а U_{RLR} ефективна вредност напона на отпорнику те гране, док је U_P ефективна вредност напона паралелнне везе. i_L је ефктивна вредност струје кроз ту грану. Важи да је $\tan\phi_{LR} = \frac{\omega L}{R}$ **[1п]** и $U_p = i_L\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ **[1п].** Фазорски дијграм за други грану у којој је кондензатор приказан је на слици б) **[2п],** где су U_C ефективна вредност напона на кондензатору, а U_{RCR} ефективна вредност напона на отпорнику у грани са кондензатором. i_C је ефктивна вредност струје кроз грану. За тај дијаграм важи $\tan\phi_{CR} = \frac{1}{\omega CR}$ **[1п]** и $U_p = i_C\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$ **[1п].** С обзиром да гране имају једнаке напоне, U_P, када објединимо дијаграме добија се дијаграм као на слици в) **[3п].** На дијаграму је предстаљено да је резултујућа струја која пролази кроз извор, ефективне вредности i, једнака збиру фазора струја које протичу кроз гране, i_C и i_L **[1п].** Да би струја била у фази са напоном извора, неопходно је да буде и у фази са напоном паралелне везе, односно да је $\tan\phi_P = 0$ **[1п].** У том случају, струја и се поклапа са напоном U_P. Са дијаграма се може закључити да је

$\tan\phi_P = \frac{i_y}{i_x} = \frac{i_L\sin\phi_{LR} - i_C\sin\phi_{CR}}{i_L\cos\phi_{LR} + i_C\cos\phi_{CR}} = 0$ **[1п].** $i_L \frac{\frac{\omega L}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = i_C \frac{\frac{1}{\omega CR}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$ **[2п]**. Ова једнакост ће важити када је $\frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR}$, односно $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ **[2п]**, што представља услов струјне резонанције, а истовремено ће тиме бити и испуњен услов да је $i_L = i_C$. Како су тада напон и јачина струје колинеарни, са дијаграма се види да је $i = i_C\cos\phi_{CR} + i_L\cos\phi_{LR} = 2i_C\cos\phi_{CR}$, одакле се добија да је $\frac{i_C}{i} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega CR)^2}}}{2} \approx 500$ **[1+1п].**

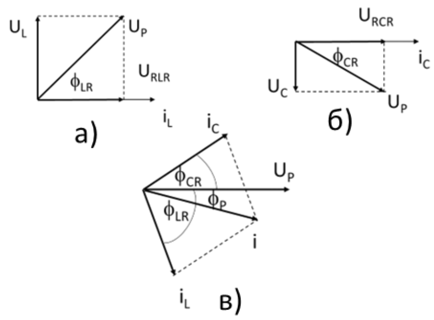
3. На наелектрисане куглице делују силе електричног поља, односно спрег сила $\vec{F} = q\vec{E}$ **[2п]**. Момент силе електричног поља, који делује на дате честице једнак је $\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}$ **[2п].** Једначина ротационог кретања иима облик $I\vec{\alpha} = \vec{M}$ **[2п]**, односно у скаларном облику $I\alpha = -qlE\sin\theta$ **[2п]**, где је θ угао који закпала вектор $\vec{l}$ и $\vec{F}$. Момемт инерције два тела, масе м, на међусобном растојању l, износи $I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}$ **[2п].** Претходни израз се може написати у форми $m\frac{l^2}{2}\ddot{\theta} = -qlE\sin\theta$ **[3п]**. За мале осцилације $\sin\theta \approx \theta$, одакле следи да је $\ddot{\theta} + \frac{2qE}{ml}\theta = 0$ **[3п]**. Из релације се види да је кружна фреквенција осцилација једнака $\omega = \sqrt{\frac{2qE}{ml}} = \sqrt{\frac{2q\sigma}{\varepsilon_0 ml}}$ **[2п]**, односно, да је период малих осцилација $T = 2\pi / \sqrt{\frac{2q\sigma}{\varepsilon_0 ml}}$ **[2п].**

4. При ротацији штапа са угао $\Delta\phi$, промена површи контуре која садржи извор износи $\Delta S = (a+l)^2\frac{\Delta\phi}{2} - a^2\frac{\Delta\phi}{2}$ **[5п]**. При томе се променити флукс магнетног поља за $\Delta\Phi = B\Delta S = B\left((a+l)^2\frac{\Delta\phi}{2} - a^2\frac{\Delta\phi}{2}\right)$ **[2п]**. Услед промене магнетног флуклса на штапу се индукује емс $\varepsilon_{ind} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} = B(a+l)^2\frac{\omega}{2} - Ba^2\frac{\omega}{2} = B(2al + l^2)\frac{\omega}{2}$ **[3п]**, где $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ **[1п]** угаона брзина ротације штапа. Јачина струје која протиче кроз проводник износи $I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_{ind}}{R+r} = \frac{2\varepsilon + B(2al+l^2)\omega}{2(R+r)}$ **[4п]**, па је напон на крајевима штапа једнак $U = \varepsilon - rI = \frac{2\varepsilon R - Br(2al+l^2)\omega}{2(R+r)}$ **[5п].**

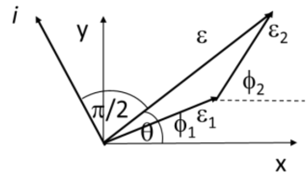
5. Јачина струје која протиче кроз коло има исту фреквенцију као и извори и може се написати у форми $i(t) = i_0 \cos(2\pi f + \phi_0)$ **[4п]**. Резултујућа емс ће имати форму $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(2\pi f + \theta) = \varepsilon_0 \cos\left(2\pi f + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$ **[4п]**, јер струја која протиче кроз кондензатор, предњачи у односу на напон кондензатора за π/2, па је почетна фаза резултујуће емс једнака $\theta = \phi_0 - \pi/2 = 0{,}173$ rad **[1п]**. Однос амплитуда јачине струје и емс је $i_0 = \varepsilon_0 \omega C$ **[1п]**. Замењујући бројне вредности, добија се да амплитуда резултујуће емс износи $\varepsilon_0 = 2{,}9\,\mathrm{V}$. Да би нашли амлитуду емс првог извора и почетну фазу другог извора, применићемо фазорски дијаграм, где компоненте емс на осе износе $\varepsilon_x = \varepsilon_{10}\cos\phi_1 + \varepsilon_{20}\cos\phi_2$ **[2п]** и $\varepsilon_y = \varepsilon_{10}\sin\phi_1 + \varepsilon_{20}\sin\phi_2$ **[2п]**, одакле следи да се почетна фаза и амплитуда резултујуће емс одређује на основу система једначина $\tan\theta = \varepsilon_y / \varepsilon_x$ **[2п]** и $\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ **[2п]**. Замењујући бројне вредности и решавајући систем једначина добија се да је амплитуда емс првог извора једнака $\varepsilon_{10} = 2\mathrm{V}$ **[1п]**, а почена фаза емс другог извора $\phi_2 = \frac{\pi}{6}$ **[1п]**.



Слика уз задатак 1



Слика уз задатак 2



Слика уз задатак 5

Сва тачна решења која се разликују од кључа признати!

Члановима комисије желимо успешан рад и пријатан дан!