ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2022/2023. ГОДИНЕ.

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

РЕПУБЛИЧКО НИВО
29.04.2023.

I РАЗРЕД

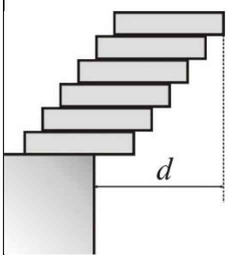
ЗАДАЦИ-БЕТА КАТЕГОРИЈА

1. На ивици стола налазе се N домина. Домине су идентичне и облика квадра најдуже странице дужине $2l$. Михаило жели да их постави у положај сличан овоме на слици 1 али тако да највиша домина највише „штрчи“ са стола. На слици је словом d обележено хоризонтално растојање највише домине од ивице стола. За које највише растојање d_{max} може да штрчи највиша домина са гомиле?

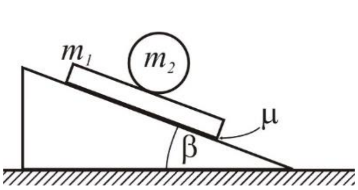
2. На слици 2 је приказан систем тела који се састоји од стрме равни нагибног угла $\beta = 30°$, квадра масе m_1 и ваљка масе m_2. Коефицијент трења између квадра и стрме равни је μ и стрма раван је причвршћена за подлогу. Уколико је познато да се ваљак креће без проклизавања, а квадар проклизава, одредити убрзање ваљка у односу на подлогу. Систем у почетном тренутку мирује.

3. Лоптица слободно пада у чинију облика калоте полупречника R и висине $H = \frac{R}{2}$, као на слици 3. Са које минималне висине h_{min} у односу на земљу, са растојања $b = \frac{R}{2}$ од осе симетрије чиније, треба пустити лоптицу тако да из чиније искочи након што је у њу ударила тачно један пут. Сматрати да је судар лоптице и чиније такав да се лоптица одбије под истим углом у односу на нормалу на чинију у тачки судара, брзином истог интензитета и да је маса лоптице много мања од масе чиније па се може сматрати да се чинија неће уопште померити приликом судара.

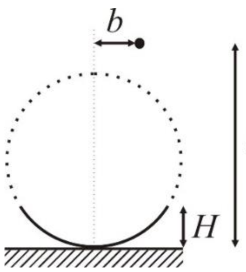
4. У току је тениски турнир из *Masters 1000* серије који се игра у Мадриду на земљаној подлози (шљаци). Због специфичности подлоге, често се одигравају спин и слајс ударци у којима лоптица поред транслаторног кретања и ротира око своје осе великом угаоном брзином. Размотримо један такав ударац тениске лоптице масе M и полупречника R. Лоптица којој је рекетом саопштен спин (слика $4b$) или слајс (слика $4a$) пада на хоризонталну, чврсту и непокретну подлогу брзином v_0, под углом θ у односу на нормалу. Услед ротације, лоптица током контакта са површином проклизава по подлози. Коефицијент трења између лоптице и шљаке је μ. Израчунати угао φ под којим ће се лоптица одбити и промену угаоне брзине $\Delta\omega$ при одскоку, након одвајања од шљаке. По чему се разликују спин и слајс ударци? Приликом судара се интензитет компоненте брзине лоптице нормалне на подлогу не мења и деформације лопте током судара су довољно мале да можете сматрати да је момент инерције константан. **Помоћ**: угао α који нека брзина u заклапа са произвољном x осом потпуно је одређен односом $\frac{u_y}{u_x} = f(\alpha)$, где је $f(\alpha) \equiv \mathrm{tg}\alpha$ позната функција, а оса y ортогонална на осу x.



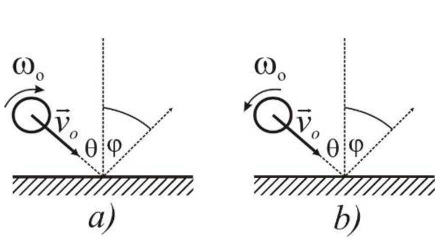
Слика 1



Слика 2



Слика 3

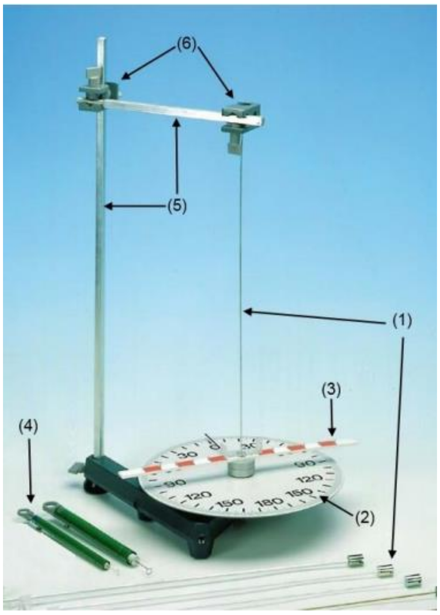


Слика 4

5. Када се жица уврне, услед еластичних особина она тежи да се врати у почетни положај. Посматрајмо жицу (1) која је на једном крају учвршћена помоћу држача (5) и (6), а другим крајем везана за центар лаког диска моји служи као угломер (2), као на слици 5. Жица је нормална на раван диска и систем

може да ротира око централне осе симетрије жице. На диску се налазе пинови (3) дуж једног пречника. Пин најближи оси налази се на растојању 5 cm од ње док је сваки наредни удаљенији за по 2.5 cm. Положаји пинова одређени су веома прецизно, сматрати без грешке. Увртање жице остварује се дејством силе путем динамометра (4) чији се један крај вуче силом F док је други закачен за неки пин, на растојању R од централне осе жице. У том положају динамометар лежи у равни диска и нормалан је на правац на коме се налазе пинови, а систем се налази у стању равнотеже. Угао θ за који је жица уврнута пропорционалан је моменту силе M који је изазвао увртање $\theta = G \cdot M$, где је θ изражено у радијанима. Константа пропорционалности G назива се константом торзије жице. Извршено је седам мерења и добијени подаци приказани су у табели. Графичком методом одредити вредност коефицијента торзије G и одговарајућу грешку ΔG.

Опсег динамометра је 1.2 N, а вредност најмањег подеока скале 0.02 N. Вредност најмањег подеока скале угломера је 2°.



Слика 5 – коришћена апаратура за одређивање. коефицијента торзије

Редни број мерења	R [cm]	F [N]	θ [°]
1	5	0.68	20
2	5	1.02	30
3	7.5	0.90	40
4	7.5	1.16	50
5	10	1.02	60
6	12.5	0.96	70
7	15	0.90	80

Табела са резултатима мерења

Напомене: Сва решења детаљно објаснити. Сваки задатак носи по 20 поена.

Свим такмичарима желимо успешан рад !

Задатке припремили: *др Никола Коњик,* Физички факултет, Београд и *Ђорђе Богдановић*, Физички факултет, Београд

Рецензент и Председник комисије: Проф. др Имре Гут, Департман за физику, Нови Сад

I РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

РЕПУБЛИЧКИ НИВО
29.04.2023.

1. Нумеришимо домине бројевима од 1 до N, почевши од највише. Обележимо са l_k хоризонтално растојање од ивице стола k-те домине. Сила реакције између k-те и $(k+1)$-е нека је обележена са N_k. Услови равнотеже сила за сваку домину тада гласи $N_k = N_{k-1} + mg$ (1) **[5п]** уз чињеницу да је $N_0 = 0$ (2) **[1п]**, односно да изнад највише домине нема ни једне друге. Овај систем једначина има решења $N_k = k \cdot mg$ (3) **[1п]**. Да бисмо домине поставили у тражени положај, свака домина мора максимално да „штрчи“ што значи да је на граници да се преврне око ћошка домине испод. У том случају, сила реакције подлоге делује баш у тој тачки **[7п]**. Зато је услов равнотеже момената сила око те тачке облика $N_{k-1} \cdot \Delta l_k = mg \cdot (l - \Delta l_k)$, где је $\Delta l_k = l_k - l_{k+1}$ (4) **[3п]**. Ова једначина се помоћу (3) може свести на $\Delta l_k = \frac{l}{k}$ (5) **[1п]**, што је задовољено и за највишу домину $\Delta l_1 = l$ **[1п]**. Коначно, највиша домина може да штрчи максимално $d_{max} = l \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N})$ **[1п]**. **Напомена:** Уколико постоји једначина (1) за тачно једно конкретно $k \neq 1$, рецимо $k = 2$, а без закључка (3), уместо **[5п+1п]** дати **[2п+0п]**. Такође, уколико постоји једначина (4) за тачно једно конкретно $k \neq 1$, рецимо $k = 2$, а без закључка (5), уместо **[3п+1п]** дати **[1п+0п]**.

2. Обележимо силу реакције између стрме равни и квадра са N_1 и између квадра и ваљка са N_2. За силу трења клизања између стрме равни и квадра важи $F_{tr} = \mu N_1$ (1) **[1п]**, а са F_{trk} обележимо силу трења котрљања која делује између ваљка и квадра. Претпоставимо да се ваљак котрља низ квадар, у односу на квадар, убрзањем a_2' и угаоним убрзањем α и да се квадар креће низ стрму раван, у односу на стрму раван, убрзањем a_1. Запишимо једначине кретања за наведена тела, у наведеним референтним системима. За квадар важи $m_1 a_1 = F_{trk} + m_1 g \sin\beta - F_{tr}$ (2) **[4п]** и $0 = N_1 - N_2 - m_1 g \cos\beta$ (3) **[2п]**. За ваљак важи да је $\frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha = R F_{trk}$ (4) **[2п]**, $m_2 a_2' = m_2 g \sin\beta - F_{trk} - m_2 a_1$ **[4п]**. (5) и $0 = N_2 - m_2 g \cos\alpha$ (6) **[2п]**, а како нема клизања важи и релација $a_2' = R\alpha$ (7) **[1п]**. Из једначина (6) и (3) се лако долази до сила реакције $N_2 = m_2 g \cos\beta$ и $N_1 = (m_1 + m_2) g \cos\beta$. Елиминацијом угаоног убрзања и силе трења котрљања помоћу једначина (4) и (7) систем једначина своди се на $\frac{1}{2} m_2 a_2' - m_1 a_1 = \mu (m_1 + m_2) g \cos\beta - m_1 g \sin\beta$ (8) и $\frac{3}{2} a_2' + a_1 = g \sin\beta$ (9). Убрзања из овог система једначина су $a_2' = 2\mu g \frac{(m_1+m_2)\cos\beta}{3m_1+m_2}$ **[1п]** и $a_1 = g \frac{3m_1(\sin\beta - \mu\cos\beta) + m_2(\sin\beta - 3\mu\cos\beta)}{3m_1+m_2}$ **[2п]**. Тражено убрзање векторски је збир убрзања $\vec{a} = \overrightarrow{a_2'} + \overrightarrow{a_1}$, интензитет му је $a = a_2' + a_1 = g \frac{m_1(3\sin\beta - \mu\cos\beta) + m_2(\sin\beta - \mu\cos\beta)}{3m_1+m_2}$ **[1п]**.

   Како је у задатку дат угао $\beta = 30°$ важи да су $\sin 30° = \frac{1}{2}$ и $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ следи да је тражено убрзање $a = \frac{g}{2} \frac{m_1(3-\mu\sqrt{3}) + m_2(1-\mu\sqrt{3})}{3m_1+m_2}$. **Напомена:** Идентично бодовати све једначине у којима су од почетка конкретизоване вредности тригонометријских функција као и еквивалентне једначине записане у другим референтним системима.

3. Нека правац брзине лоптице пре судара са калотом заклапа угао α са нормалом. Како је нормала дуж полупречника у тачки судара, а $\frac{b}{R} = \frac{1}{2}$ закључујемо да је $\alpha = 30°$ **[2п]**. Нека је β угао који заклапа правац брзине непосредно након судара са хоризонталом. Из везе углова $2\alpha + \beta = 90°$ видимо да је $\beta = 30°$ **[2п]**. Тачка судара лоптице са чинијом налази се на висини $h_0 = R(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ **[1п]**. Уколико са v_0 обележимо брзину коју лоптица има приликом судара, да бисмо одредили минималну висину потребно је да лоптица одскочи таман толико да прескочи леву ивицу калоте која је од осе симетрије чиније удаљена тачно $d = R\frac{\sqrt{3}}{2}$. То значи да важи $v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t = d + b = R(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$ **[5п]** и $v_0 \frac{1}{2} t - \frac{gt^2}{2} = \frac{R}{2} - h_0 = R(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})$ **[6п]**. Елиминацијом времена, уз мало рачуна, долази се

до брзине ${v_0}^2 = gR\frac{9+5\sqrt{3}}{6}$. Та се брзина постиже приликом слободног пада са висине $h'_{min} = \frac{{v_0}^2}{2g} = R\frac{9+5\sqrt{3}}{12}$ те је тражена висина $h = h'_{min} + h_0 = R\frac{21-\sqrt{3}}{12}$ **[4п]**.

4. Како се вертикална компонента брзине (дуж y осе) по интензитету није променила важи релација $v_0\cos\theta = u\cos\varphi$ **[1п]**, где је u брзина лоптице после судара. Промена вертикалне компоненте импулса лоптице приликом судара је $\Delta p_y = 2Mv_0\cos\theta$ **[2п]** и настала је због дејства (средње) силе реакције подлоге $N = \frac{\Delta p_y}{\Delta t_s}$ **[2п]**, током времена трајања судара Δt_s. На лоптицу делује и (средња) сила трења (дуж x осе) која је по интензитету једнака $F_{tr} = \mu N$ **[1п]** која је одговорна за промену хоризонталне компоненте импулса лоптице $\Delta p_x = F_{tr}\Delta t_s = \mu\Delta p_y = 2\mu M v_0\cos\theta$ **[4п]** и за промену момента импулса лоптице $\Delta L = RF_{tr}\Delta t_s = \mu R\Delta p_y = 2\mu RMv_0\cos\theta$ **[4п]** (под претпоставком да се момент инерције лоптице не мења, не мења јој се ни полупречник). У зависности да ли је ударац био спин или слајс, смер силе трења је таква да повећава односно смањује хоризонталну компоненту брзине. За промену хоризонталне компоненте импулса у случају спин/слајс ударца важи $Mv_0\sin\theta \pm \Delta p_x = Mu\sin\varphi$ **[1п+1п]** што се може преписати као $v_0(\sin\theta \pm 2\mu\cos\theta) = u\sin\varphi$ одакле следи $\text{tg}\varphi = \text{tg}\theta \pm 2\mu$ **[1п+1п]**. У случају оба ударца момент силе трења смањује угаону брзину за $\Delta\omega = \frac{\Delta L}{I} = 5\mu\frac{v_0}{R}\cos\theta$ **[1п]**. Дакле, приликом спин/слајс ударца, лоптица одскаче под већим/мањим углом у односу на нормалу у поређењу са углом θ што је праћено губитком угаоне брзине **[1п]**.

   Напомена: Све једначине се могу написати преко компоненти брзина v_0 и u помоћу $v_{0x} = v_0\sin\theta$, $v_{0y} = v_0\cos\theta$, $u_x = u\sin\varphi$ и $u_y = u\cos\varphi$. Пошто је у задатку речено да је угао потпуно одређен односом компоненти брзина преко функције $f(\alpha)$, уз чињеницу да је познат интензитет брзине, да се закључити да је позната и вредност $v_y = v_0\frac{1}{\sqrt{1+f^2(\theta)}}$. Тада је тражено решење $f(\varphi) = f(\theta) \pm 2\mu$ и $\Delta\omega = 5\mu\frac{v_0}{R\sqrt{1+f^2(\theta)}}$.

5. Дејством силе F остварује се момент силе $M = FR$ **[1п]**, где је R крак силе. Овај момент силе уврће жицу за угао θ и важи релација $\theta = GM$ која се графички треба представити као линеарна функција $y = k\cdot x + n$, где је $k = G$.

   На основу реченог, састављена је табела 2 **[свако поље у табели по 0.2п, укупно 4.2п]** и нацртан је график зависности угла увртања жице од момента силе, $\theta = f(M)$.

   Грешка одређивања момента силе је $\Delta M = R\Delta F$ **[1п]**, где је $\Delta F = 0.02N$ **[1п]** што је вредност најмањег подеока скале динамометра. Због релативно малог опсега динамометра било је потребно мењати пинове током времена што је повећавало грешку. Грешка одређивања угла је вредност најмањег подеока скале и износи $\Delta\theta = 2° = 0.03491\,rad$ односно $\Delta\theta = 0.04\,rad$ **[1п]**.

   На основу табеле нацртан је график зависности угла увртања жице од момента силе. Одабиром тачака са графика, између прве две и последње две, можемо израчунати коефицијент правца. Координате тачака су $A(0.040;\ 0.41)$ **[1п]** и $B(0.130; 1.33)$ **[1п]**. Тада је коефицијент правца, уједно и тражена константа торзије $k = G = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = 10.222\frac{rad}{Nm}$, а грешка његовог одређивања износи $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{|x_A - x_B|} + \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{|y_A - y_B|}$, односно $\Delta k = \Delta G = 1.343\frac{rad}{Nm}$. Коначно, грешка одређивања коефицијента правца је $\Delta k = \Delta G = 1.4\frac{rad}{Nm}$, а коефицијент правца износи $k = G = (10.2 \pm 1.4)\frac{rad}{Nm}$ **[1п+2п]**. За грешке очитавања тачака узимамо већу грешку од грешака најближих експерименталних тачака, по свакој оси или вредност најмањег подеока скале уколико је већи (размера). У нашем случају грешке су биле веће од најмањих подеока па су $\Delta x_A = 0.001\ Nm$ **[1п]**, $\Delta x_B = 0.003\ Nm$ **[1п]** и $\Delta y_A = \Delta y_B = 0.04\ rad$ **[0.5п+0.5п]**. Исправно нацртан график вреди **[3.8п]**.

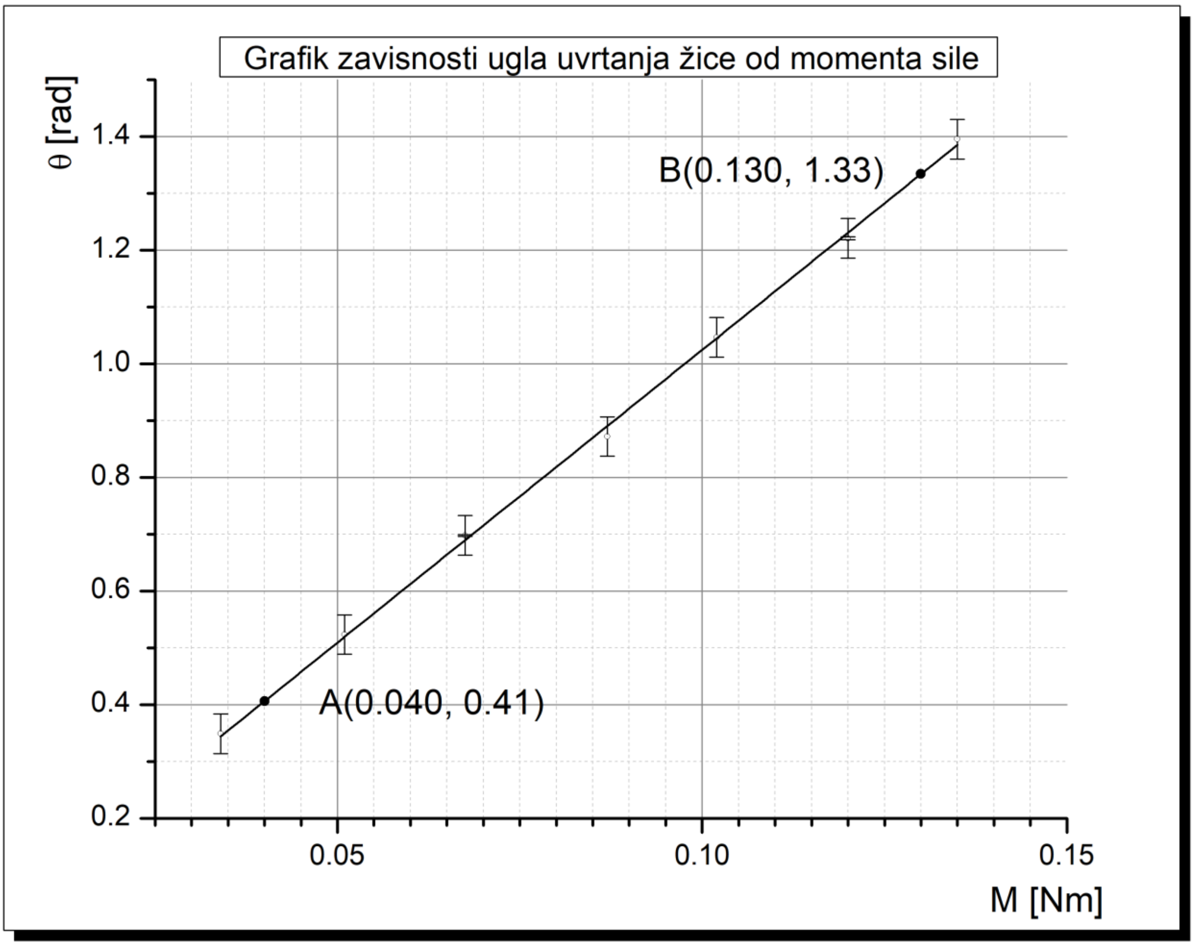


График зависности угла увртања жице од момента силе

Редни број мерења	$M\ [Nm]]$	$\Delta M\ [Nm]$	$\theta\ [rad]$
1	0.0340 0.034	0.001 0.001	0.3491 0.35
2	0.0510 0.051	0.001 0.001	0.5236 0.52
3	0.0675 0.0675	0.0015 0.0015	0.6981 0.70
4	0.0870 0.0870	0.0015 0.0015	0.8726 0.87
5	0.1020 0.102	0.002 0.002	1.0472 1.05
6	0.1200 0.120	0.0025 0.003	1.2217 1.22
7	0.1350 0.135	0.003 0.003	1.3962 1.40

Табела потребна за цртање графика

Напомена! Равноправно вредновати мајоризацију грешака облика $0,0015 = 0,002$ уколико је конзистентно коришћена.

Напомена! Равноправно бодовати обе оријентације графика и све форме зависности на основу којих је спровођен поступак.

Признати и праведно бодовати и сва решења која нису по кључу!

Члановима комисије желимо успешан рад и пријатан дан!