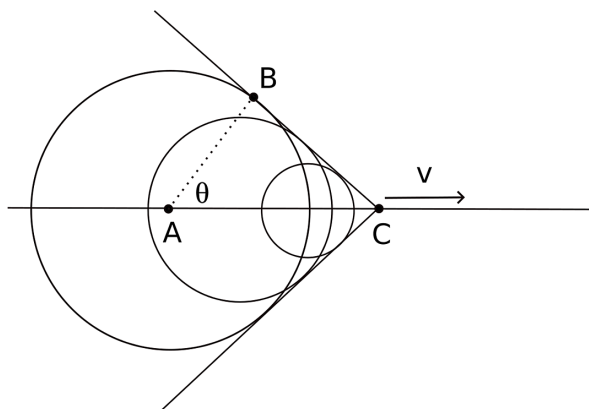




1. (а) Магнетна индукција проводника кроз који тече струја јачине  $I$  на растојању  $l$  је једнака  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$ . Сила по јединици дужине којом интерагују проводници је  $f = IB$ . Снага  $P$  је дата изразом  $P = UI$ . Из претходних израза налазимо  $f = \frac{\mu_0 P^2}{2\pi l U^2}$ . Да би сила била мања од  $f_m$  следи да напон треба да буде већи од  $U > U_m = P \sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi f_m l}}$ . Израчунавањем налазимо  $U_m = 7,1 \text{ kV}$ .
- (б) Укупна отпорност две бакарне жице је  $R = \rho \frac{2d}{S}$ . Снага губитака је  $P_g = I^2 R$ , где је, као и у претходном делу задатка,  $P = UI$ . Ефикасност је једнака  $\eta = \frac{P}{P+P_g}$ . Из претходних израза налазимо  $U = \sqrt{\frac{\eta P}{1-\eta} \frac{2\rho d}{S}}$ . Да би ефикасност била већа од  $\eta_m$ , потребно је да напон буде већи од  $U > U_m = \sqrt{\frac{\eta_m P}{1-\eta_m} \frac{2\rho d}{S}}$ . Израчунавањем налазимо  $U_m = 14,7 \text{ kV}$ .
2. (а) Кинетичка енергија електрона је  $T = (\gamma - 1)m_e c^2$  одакле налазимо да је  $\gamma = 1 + \frac{T}{m_e c^2}$ . С обзиром да је  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  закључујемо да је  $\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{(\gamma)^2}} \approx 0,983$ . С друге стране брзина светлости кроз воду је  $c_s = \frac{c}{n} \approx 0,75c$ . Закључујемо, дакле, да је  $v > c_s$  односно да долази до емисије Черенковљевог зрачења.
- (б) С обзиром да се таласни фронт Черенковљевог зрачења креће брзином мањом од брзине честице, он ће се образовати иза честице. На слици 1 су приказани таласни фронтови настали у 3 узастопна положаја извора таласа (честице) као и обвојница тих таласа која има облик купе. За неко време  $\Delta t$  честица (извор зрачења) је прешла растојање  $\overline{AC} = v\Delta t$ , док је талас прешао растојање  $\overline{AB} = c_s \Delta t$ . Из правоуглог троугла  $ABC$  са слике је јасно да је  $\cos \theta = \frac{c_s \Delta t}{v \Delta t} = \frac{c_s}{v} = \frac{1}{n \sqrt{1 - \frac{1}{(\gamma)^2}}}$ . Одатле се налази да је  $\theta \approx 40,1^\circ$ .



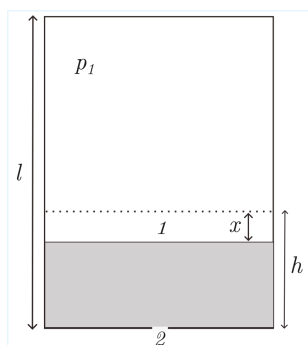
Слика 1: уз решење задатка 2

3. (а) У крајњим тачкама осциловања је  $v = 0$ , па из закона одржања енергије следи  $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ , одакле је  $A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ . За произвољан положај  $x$  важи  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ , па је  $v(x) = \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}$ . Пошто је  $x(t) = A \cos \omega t$ , добијамо  $\langle x^2 \rangle = \frac{A^2}{2} = \frac{E}{m\omega^2}$ . Даље,  $v(t) = -A\omega \sin \omega t$ , па је  $\langle v^2 \rangle = \frac{A^2 \omega^2}{2} = \frac{E}{m}$ . Зато су  $\langle T \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{E}{2}$ ,  $\langle V \rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{E}{2}$ , те је  $\frac{\langle T \rangle}{\langle V \rangle} = 1$ .
- (б) Треба одредити део периода за који је  $|x| < \alpha A$ . Како је  $x = A \cos \omega t$ , то је услов еквивалентан са  $|\cos \omega t| < \alpha$ . Ако ставимо  $\theta = \omega t$ , током једног периода  $0 \leq \theta < 2\pi$  ова неједнакост важи на интервалима  $\arccos \alpha < \theta < \pi - \arccos \alpha$  и  $\pi + \arccos \alpha < \theta < 2\pi - \arccos \alpha$ . Укупна дужина ових интервала је  $2\pi - 4 \arccos \alpha$ , па је тражени део периода  $1 - \frac{2}{\pi} \arccos \alpha$ .
- (в) За квантни хармонијски осцилатор важи  $\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle$ . Како је потенцијална енергија симетрична функција координате, средња вредност координате честице је  $\langle x \rangle = 0$ . У задатку је речено и да је  $\langle p \rangle = 0$ .

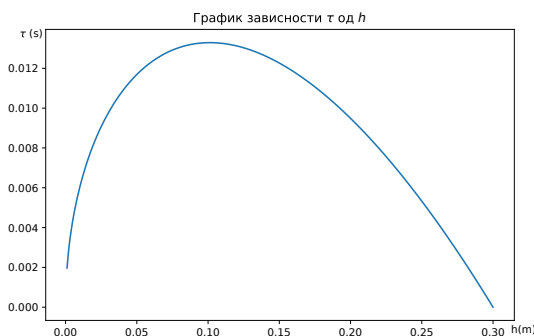


Користећи чињеницу да су наведене средње вредности једнаке нули и дефиницију неодређености дату у тексту задатка налазимо  $\langle x^2 \rangle = (\Delta x)^2$ ,  $\langle p^2 \rangle = (\Delta p)^2$ , и отуда  $\langle E \rangle = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$ . По принципу неодређености,  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ , па следи  $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$ . Зато добијамо  $\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$ . Минимум десне стране добија се из услова  $\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^3} = m\omega^2\Delta x$ , односно  $(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ . Дакле,  $\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ . Из једнакости у принципу неодређености тада следи  $\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x} = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} = m\omega\Delta x$ . За ову вредност је  $\langle E \rangle_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2}$ . Принцип неодређености не дозвољава да честица истовремено има тачно одређен положај и импулс. Зато није могуће да се честица налази тачно у положају равнотеже и да притом има нулти импулс. Када би енергија основног стања била произвољно мала, и кинетичка и потенцијална енергија морале би истовремено бити произвољно мале, што би значило да су и положај и импулс готово тачно одређени. То је у супротности са принципом неодређености. Зато основно стање мора имати ненулту енергију.

4. Након што се ниво течности у флаши спусти за  $x$  (слика 2) притисак ваздуха у остатку флаше се спусти на  $p_1 = p_a \frac{l-h}{l-h+x}$  услед изотермске експанзије. Пошто је вода моделована идеалним флуидом, за тачке 1 и 2 можемо искористити Бернулијеву једначину и једначину континуитета:  $p_1 + \rho g(h-x) + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_a + \frac{\rho v_2^2}{2}$ ,  $S_1 v_1 = S_2 v_2$ . Из једначине континуитета, користећи да је  $v_1 = \dot{x}$  налазимо  $v_2 = \frac{S_1}{S_2} \dot{x} = \eta \dot{x}$  што смењујемо у Бернулијеву једначину и добијамо:  $p_1 - p_a + \rho g(h-x) = \frac{\rho(\eta^2-1)\dot{x}^2}{2}$ . С обзиром да је  $x \ll l, h$  израз за  $p_1$  можемо апроксимирати са  $p_1 \approx p_a(1 - \frac{x}{l-h})$ . Након тога Бернулијева једначина се своди на  $gh - (g + \frac{p_a}{\rho(l-h)})x = \frac{(\eta^2-1)\dot{x}^2}{2}$ . Диференцирањем целе једначине по времену добијамо једначину  $\ddot{x} = -\frac{g + \frac{p_a}{\rho(l-h)}}{\eta^2-1}$ , која је иста као једначина за равномерно успорено кретање. Узимајући у обзир да је почетна брзина  $\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{2gh}{\eta^2-1}}$ , време до уласка мехурића налазимо као  $\tau = \frac{\dot{x}(0)}{\frac{g + \frac{p_a}{\rho(l-h)}}{\eta^2-1}}$ . Коначно добијамо:  $\tau = \frac{\sqrt{\frac{2gh}{\eta^2-1}}}{1 + \frac{p_a}{g\rho(l-h)}} \approx 0,013$  s. Са графика на слици 3 закључујемо да је функција  $\tau(h)$  за дати избор параметара система растућа ( $h = 0,08$  m што је мање од 0,1 m када функција достиже максимум), одакле закључујемо да се са истицањем течности време између уласка мехурића смањује, што се и опажа као феномен (признаје се и сваки други поступак којим је показано да је функција  $\tau(h)$  растућа у интервалу од  $h = 0$  до  $h = 0,08$  m).



Слика 2: скица уз решење задатка 4



Слика 3: график уз решење задатка 4

5. (a) Површина попречног пресека стабла је сразмерна квадрату пречника  $S \propto d^2$ . Проток хранљивих материја кроз стабло ка лишћу је  $q = Sv$ , где је  $v$  брзина која је иста за свако дрво. Број листова је сразмеран запремини крошње  $N \propto V$ . Са слике се види да је висина крошње приближно једнака висини дрвета, као и да је ширина крошње приближно једнака тој висини. Зато је запремина крошње сразмерна трећем степену висине дрвета  $V \propto h^3$ . У равнотежи проток хранљивих материја кроз стабло је једнак њиховом дотоку у лишће, па је  $q \propto N$ . Из претходних једначина налазимо  $d^2 \propto h^3$ , односно  $h = b \cdot d^{2/3}$ , тј.  $\alpha = 2/3$ .

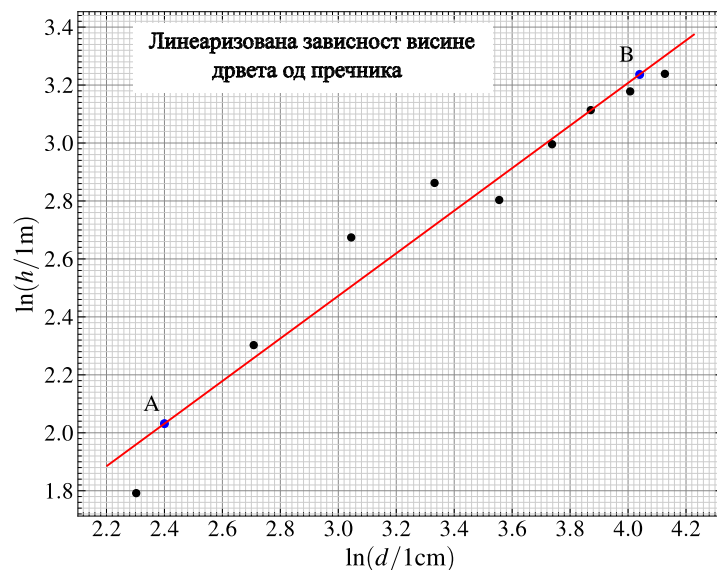


(б) Логаритмовањем се дата зависност своди на линеарну  $\ln(h/1\text{ m}) = b' + \alpha \ln(d/1\text{ cm})$ . Одговарајући подаци су приказани у табели 1.

|                     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $d$ (cm)            | 10,0 | 15,0 | 21,0 | 28,0 | 35,0 | 42,0 | 48,0 | 55,0 | 62,0 |
| $h$ (m)             | 6,0  | 10,0 | 14,5 | 17,5 | 16,5 | 20,0 | 22,5 | 24,0 | 25,5 |
| $\ln(d/1\text{cm})$ | 2,30 | 2,71 | 3,04 | 3,33 | 3,56 | 3,74 | 3,87 | 4,01 | 4,13 |
| $\ln(h/1\text{m})$  | 1,79 | 2,30 | 2,67 | 2,86 | 2,80 | 3,00 | 3,11 | 3,18 | 3,24 |

Табела 1: уз решење задатка 5

График линеаризоване зависности је приказан на слици 4. Између добијених тачака се провлачи права тако да оквирно буде подједнак број тачака са обе стране праве и да положаји тачака што мање одступају од праве. Коефицијент  $\alpha$  је једнак нагибу те праве. Да бисмо одредили тај нагиб, на правој бирамо две тачке са координатама  $A(2,4; 2,04)$  и  $B(4,04; 3,24)$ . Коефицијент  $\alpha$  налазимо из  $\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ , одакле добијамо  $\alpha \approx 0,73$ .



Слика 4: Линеаризована зависност висине дрвета од пречника.

Подаци приказани у овом задатку су преузети из рада F. Saglam, O. E. Sakici, Ecoregional height–diameter models for Scots pine in Turkiye, J. For. Res. 35, 103 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11676-024-01757-z>. Слика у тексту задатка је настала обрадом фотографије дрвета коришћењем ChatGPT од OpenAI.