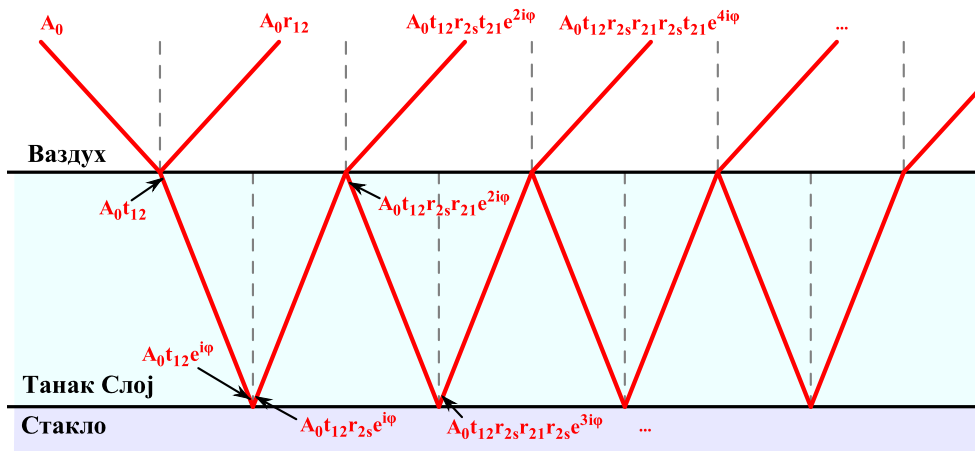




1. (а) Фазна разлика је одређена изразом:  $\phi = k\Delta s$ , где је  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  таласни број, док је  $\Delta s = nd$  оптички пут који талас пређе при једноструком пролазу кроз танак слој. Према томе, добијамо:  $\phi = \frac{2\pi nd}{\lambda} \boxed{2\pi}$ .



Слика 1: Приказ рефлектованих и трансмитованих таласа у задатку 1. Ради боље прегледности, таласи су нацртани као да падају под углом у односу на површину, иако, у реалности, они падају управно на раздвојну површ.

- (б) У танком слоју долази до бесконачно много рефлексија и трансмисија (видети слику 1)  $\boxed{2\pi}$ . У овом делу пишемо укупан израз за амплитуду таласа у рефлектованом делу таласа. Фазор таласа након прве трансмисије је дат са:  $\psi_1 = r_{12}A_0 \boxed{1\pi}$ . Одредимо сада израз за фазор следећег таласа који учествује у интерференцији у оквиру рефлектоване светлости. Како бисмо то постигли, морамо пратити како се талас мења приликом проласка кроз антирефлексионни слој. Након иницијалне трансмисије, амплитуда таласа се мења  $t_{12}$  пута:  $t_{12}A_0$ ; потом талас једноструко пролази кроз танак слој и купи фазу  $e^{i\phi}$ , односно:  $t_{12}e^{i\phi}A_0 \boxed{1\pi}$ . Сада, талас се поново рефлектује, па имамо:  $t_{12}r_{2s}e^{i\phi}A_0$ . Поново, талас пролази кроз танак слој, те још једном купи фазу:  $t_{12}r_{2s}e^{2i\phi}A_0 \boxed{1\pi}$ . Коначно, талас се поново трансмитује и излази у област ван антирефлексионног слоја, те је фазор другог таласа у рефлектованој светлости дат са:  $\psi_2 = t_{12}t_{21}r_{2s}e^{2i\phi}A_0 \boxed{1\pi}$ . Део овог таласа се поново рефлектује у област танког слоја, и пролази још једнапут кроз целокупан процес док не напусти област танког слоја. Те је фазор трећег таласа који интерферира ван танког слоја дат са:  $\psi_3 = t_{12}t_{21}r_{2s}r_{21}r_{2s}e^{4i\phi}$ . Понављајући овај резон долазимо до следеће геометријске прогресије:  $\psi = A_0 [r_{12} + t_{12}t_{21}r_{2s}e^{2i\phi} (1 + r_{21}r_{2s}e^{2i\phi} + (r_{21}r_{2s})^2e^{4i\phi} + (r_{21}r_{2s})^3e^{6i\phi} + \dots)] \boxed{2\pi}$ . Коришћењем формуле за суму бесконачног геометријског реда (смето је користити зато што је  $|r_{21}r_{2s}e^{2i\phi}| < 1$ ), добијамо:

$\bar{\psi} = A_0 \frac{r_{12} + (t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21})r_{2s}e^{2i\phi}}{1 - r_{21}r_{2s}e^{2i\phi}}$ . Помоћу конкретних израза за Френелове коефицијенте закључујемо да важи:  $t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} = 1$ , као и:  $r_{12} = -r$  (овај минус осликава чињеницу да талас мења фазу за  $\pi$  при рефлексији о оптички гушћу средину),  $r_{2s} = -R$  и  $r_{21} = r$ . Сада је финални израз за фазор рефлектоване светлости дат са:  $\psi(\phi, r, R, A_0) = \frac{r + Re^{2i\phi}}{1 + rRe^{2i\phi}} A_0 e^{i\pi} \boxed{2\pi}$ .

- (в) Познато је да је интензитет пропорционалан квадрату амплитуде, или у овом случају квадрату модула фазора придруженог таласу. Према томе, важи:  $I/I_0 = |\psi|^2/|A_0|^2 \boxed{1.5\pi}$ . Након рачуна добија се:  $I(\phi, r, R, A_0) = I_0 \frac{r^2 + R^2 + 2rR \cos(2\phi)}{1 + (rR)^2 + 2rR \cos(2\phi)} \boxed{1.5\pi}$ .

- (г) Израз за интензитет рефлектоване светлости добијен у претходном делу се може преписати у следећем облику:  $I = I_0 \left[ 1 - \frac{(1-r^2)(1-R^2)}{1 + (rR)^2 + 2rR \cos(2\phi)} \right]$ . Ова функција достиже минимум када је други члан у загради максималан, што се постиже када је његов именилац минималан. Те се услов своди на:  $\cos(2\phi) = -1$ . Према томе, за могуће дебљине танког слоја, добијамо:  $d_m = \frac{(2m+1)\lambda}{4n}$ , где је  $m \in \mathbb{N}$ , те је минимална дебљина антирефлексионног слоја дата са:  $d = \frac{\lambda}{4n} \boxed{2\pi}$ . Сада је минимална вредност интензитета дата са:  $I_{min} = I_0 \frac{(R-r)^2}{(1+rR)^2}$ . Услов да је интензитет рефлектоване светлости једнак нули се сада своди на:  $R = r$ . Након коришћења израза за Френелове коефицијенте добијамо одговарајућу вредност индекса преламања антирефлексионног слоја:  $n = \sqrt{n_S} \boxed{2\pi}$ . Заменом бројних вредности, добијамо:  $n = 1.233 \boxed{0.5\pi}$  и  $d = 113.555\text{nm} \boxed{0.5\pi}$ .

**Напомена:** Уколико ученик занемари могућност вишеструке рефлексије у танком слоју а добије резултат за дебљину танког слоја, дати  $\boxed{1\pi}$  за тај резултат. Такође, ако процени вредност индекса преламања дати још  $\boxed{0.5\pi}$ .



2. (а) Густина стања је дефинисана са  $\rho(E) = \frac{dN}{dE}$ . Вероватноћа да електрон попуни неко дозвољено стање је дата Ферми-Дираковом расподелом, те је број попуњених стања по јединици запремине, која имају енергије из интервала  $(E, E+dE)$ , дат као производ густине стања (по јединици запремине) и Ферми-Диракове расподеле, тј.  $dn = f_{FD}(E)\rho(E)dE$  **[1п]**. Укупна концентрација електрона у проводној зони се добија интегралом овог израза  $n_C = \int_{E_C}^{E_C+\Delta E_C} f_{FD}(E)\rho_C(E)dE$  **[1п]**.
- (б) Донорски ниво код полупроводника  $n$ -типа садржи електроне који припадају нејонизованим донорима. Када донор постане јонизован, електрон прелази у проводну зону, а сам донор постаје фиксирано позитивно наелектрисање. Ферми-Диракова расподела даје вероватноћу налажења електрона на енергији  $E$ , док  $1 - f_{FD}$  даје вероватноћу да је дато енергетско стање празно. Према томе, концентрација јонизованих донора се може написати као  $N_d^+ = N_d(1 - f_{FD}(E_d))$  **[1п]**, тј.  $N_d^+ = \frac{N_d}{1 + e^{\frac{E_F - E_d}{k_B T}}}$  **[1п]**. Слично код полупроводника  $p$ -типа, нејонизовани акцептори припадају акцепторском нивоу. Када је акцептор јонизован, он поседује електрон који није компензован позитивним наелектрисањем из језгра атома акцептора. Електрон који јонизује акцептор обично потиче из валентне зоне. Према томе, концентрација јонизованих акцептора се може написати као  $N_a^- = N_a f_{FD}(E_a)$  **[1п]**, тј.  $N_a^- = \frac{N_a}{1 + e^{\frac{E_a - E_F}{k_B T}}}$  **[1п]**.
- (в) Помоћу датог израза за густину стања у проводној зони, можемо да нађемо концентрацију електрона у проводној зони на следећи начин  $n_C = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_C}^{+\infty} \frac{\sqrt{E - E_C}}{1 + e^{\frac{E - E_F}{k_B T}}} dE$ . У задатку је дато да је  $\Delta E_C$  велико, те се може при интегралнењу узети да је крај проводне зоне у бесконачности. Уз апроксимацију која је дата у задатку да је  $\frac{E - E_F}{k_B T} \gg 1$ , интеграл постаје  $n_C = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{E_C}^{+\infty} e^{-\frac{E - E_F}{k_B T}} \sqrt{E - E_C} dE = \frac{1}{4} \left(\frac{2mk_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_C - E_F}{k_B T}}$  **[2п]**. Интеграл се решава помоћу датог математичког приручника. Приметимо да када је температура блиска нули концентрација електрона у проводној зони би била  $N_C \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{4} \left(\frac{2mk_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ . Укупан број јонизованих донора који доприносе концентрацији електрона у проводној зони је онда одређен са  $n_C = N_d^+ = \frac{N_d}{1 + e^{\frac{E_F - E_d}{k_B T}}}$  **[3п]**. Када изједначимо релације за концентрацију електрона у проводној зони и уведемо смену  $x = e^{\frac{E_F}{k_B T}}$ , добијамо квадратну једначину  $x^2 + x e^{\frac{E_d}{k_B T}} - \frac{N_d}{N_c} e^{\frac{E_C + E_d}{k_B T}} = 0$  **[2п]**. Решавањем квадратне једначине добијамо да је енергија Фермијевог нивоа дата изразом  $E_F = k_B T \log \left[ \frac{1}{2} e^{\frac{E_d}{k_B T}} \left( \sqrt{1 + 4 \frac{N_d}{N_c} e^{\frac{E_C - E_d}{k_B T}}} - 1 \right) \right]$  **[2п]**.
3. Уводимо стандардни гравитациони параметар  $\mu = MG$ .  $G$  је Њутнова гравитациона константа а  $M$  маса Сунца. Нека индекси 1,2 означавају најближу и најдаљу тачку орбите респективно, док за величине након једног испаравања користимо ознаке  $1'$  и  $2'$ .
- (а) Енергију по јединици масе означавамо са  $\varepsilon$ , док момент импулса по јединици масе означавамо са  $l$ . Пре испаравања, закон одржања енергије по јединици масе комете је дат са:  $\varepsilon = \frac{1}{2}v_1^2 - \frac{\mu}{r_1} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{\mu}{r_2}$  **[1п]**, док је закон одржања момента импулса по јединици масе комете дат са:  $l = r_1 v_1 = r_2 v_2$  **[1п]**. Први изрази у законима одржања одговарају најближој тачки орбите  $r_1$ , док други изрази одговарају најдаљој тачки  $r_2$ . Решавањем овог система једначина по брзинама, за  $l$  и  $\varepsilon$  добијамо:  $l = \sqrt{\frac{2\mu r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$  **[1п]** и  $\varepsilon = -\frac{\mu}{r_1 + r_2}$  **[1п]**.
- (б) Нека је брзина комете пре испаравања  $\vec{v}_1$  а после испаравања  $\vec{v}'_1$ . Размотримо испаравање у систему центра масе комете. Нека је брзина комете, у систему центра масе, након испаравања  $\vec{u}_1$ . Закон одржања импулса у околини тренутка испаравања је дат са:  $0 = \Delta m \vec{v}_e + (m - \Delta m) \vec{u}_1$ . У систему везаном за Сунце за брзину комете након испаравања добијамо  $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \frac{\Delta m \vec{v}_e}{m - \Delta m}$  **[1п]**. Након испаравања, момент импулса у односу на Сунце је дат са:  $\vec{L}'_1 = (m - \Delta m) \vec{r}_1 \times \vec{v}'_1 = \vec{r}_1 \times ((m - \Delta m) \vec{v}_1 - \Delta m \vec{v}_e) = (m - \Delta m) \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \frac{m - \Delta m}{m} \vec{L}_1$ , одакле добијамо  $\frac{\vec{L}'_1}{m - \Delta m} = \frac{\vec{L}_1}{m}$ . У претпоследњем кораку искоришћена је претпоставка да водена пара испарава у правцу Сунца, те важи  $\vec{v}_e \times \vec{r}_1 = 0$ . Закључујемо да, након испаравања, нема промене момента импулса по јединици масе комете, тј.  $\Delta l = 0$  **[1п]**. Закон одржања момента импулса по јединици масе сада је дат са  $v_1 r_1 = v'_1 r'_1$ . Закон одржања енергије по јединици масе примењен на тренутак непосредно након испаравања и на тренутак у ком се достиже нова најудаљенија тачка орбите  $r'_2$ , гласи:  $\varepsilon' = \frac{1}{2}v_1'^2 - \frac{\mu}{r_1} = \frac{1}{2}v_2'^2 - \frac{\mu}{r_2}$  **[1п]**. Комбиновањем ових једначина добијамо:  $\varepsilon' = \frac{1}{2}v_1'^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{m - \Delta m}\right)^2 v_e^2 - \frac{\mu}{r_1} = \varepsilon + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{m - \Delta m}\right)^2 v_e^2$ . Према томе, за промену енергије по јединици масе комете добијамо:  $\Delta \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m}{m - \Delta m}\right)^2 v_e^2 \equiv Q$  **[1п]**, где смо увели нову ознаку  $Q$  за енергију по

Задатке припремили: Стефан Ђорђевић и Ана Кнежевић, Физички Факултет, Универзитет у Београду, Миша Томан и Хана Шиф, Универзитет у Калифорнији, Ирвин.

Рецензент: Јован Марков, Научни институт Вајцман, Израел

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: проф. др Имре Гут, Универзитет у Новом Саду



јединици масе коју комета изгуби током испаравања. Овде смо искористили чињеницу да важи  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_e = 0$ , с обзиром да се испаравање догодило у најближој тачки орбите комете пре испаравања.

- (в) Претходна једначина даје решење за  $r'_2$  (иста једначина мора дати и решење за  $r'_1$  јер су обе вредности решења ове квадратне једначине):  $-\frac{\mu}{r_1+r_2} + Q = \frac{\mu r_1 r_2}{(r_1+r_2)r_2^2} - \frac{\mu}{r_2^2} \boxed{2\text{п}}$ . Након увођења смене  $\xi_{\pm} = \frac{1}{r_{1,2}}$  и преписивања претходне једначине као квадратне по  $\xi_{\pm}$ , добијамо  $\xi_{\pm}^2 - \frac{r_1+r_2}{r_1 r_2} \xi_{\pm} + \frac{1}{r_1 r_2} - \frac{Q}{\mu} \frac{r_1+r_2}{r_1 r_2} = 0$ . Решење ове једначине је дато са:  $\xi'_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1+r_2}{r_1 r_2} \pm \frac{r_2-r_1}{r_1 r_2} \sqrt{1 + \frac{4Q}{\mu} \frac{r_1 r_2 (r_1+r_2)}{(r_1-r_2)^2}} \right) \boxed{2\text{п}}$ . Како је  $\xi_+ > \xi_-$ , јасно је да важи  $r'_1 = \frac{1}{\xi_+}$   $r'_2 = \frac{1}{\xi_-}$   $\boxed{2\text{п}}$ .

- (г) Представимо решење овог дела задатка на два начина.

– **Први начин:** Укупна енергија затворене (елиптичне) орбите је увек негативна. Из дела под (а) почетна енергија по јединици масе је  $\varepsilon_0 = -\frac{\mu}{r_1+r_2}$ . Након  $N$  пролазака комете кроз најближе тачке своје орбите, укупна енергија по јединици масе ће порасти за количину  $NQ$ , тј.  $E = \varepsilon_0 + NQ$  зато што је величина  $Q$  иста током сваког проласка комете  $\boxed{2\text{п}}$ , према претпоставци задатка. Енергија ће расти све до тренутка док не постане једнака нули. Овај тренутак одговара преласку из елиптичне орбите у хиперболичку орбиту, па самим тим и последњој затвореној орбити комете око Сунца. Према томе, број пролазака комете око Сунца је одређен једначином:  $0 = -\frac{\mu}{r_1+r_2} + NQ$  Решавањем ове једначине добијамо

$$N = \left\lfloor \frac{\mu}{Q(r_1+r_2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\mu}{v_e^2(r_1+r_2)} \left(1 - \frac{m}{\Delta m}\right)^2 \right\rfloor \boxed{2\text{п}}$$

**Напомена:** Преостала  $\boxed{2\text{п}}$  додељују се за добро образложење поступка наведеног у овом начину решавања задатка.

– **Други начин:** Посматрајмо  $\xi_n^{(\pm)}$  као два низа одређена редним бројем  $n$  проласка комете кроз најближу тачку своје орбите око Сунца. На основу резултата претходног дела задатка долазимо до следећег система рекурентних релација:  $\xi_{n+1}^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( \xi_n^{(+)} + \xi_n^{(-)} \pm \left( \xi_n^{(+)} - \xi_n^{(-)} \right) \sqrt{1 + \frac{4Q}{\mu} \frac{\xi_n^{(+)} + \xi_n^{(-)}}{\left( \xi_n^{(+)} - \xi_n^{(-)} \right)^2}} \right)$ . Уз релације, имамо и почетне услове:  $\xi_0^{(+)} = 1/r_1$  и  $\xi_0^{(-)} = 1/r_2$   $\boxed{1\text{п}}$ . Прво, уочимо да важи:  $\xi_{n+1}^{(+)} + \xi_{n+1}^{(-)} = \xi_n^{(+)} + \xi_n^{(-)} = \text{const.} = C = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$   $\boxed{1\text{п}}$ . Потом, посматрајмо помоћни низ  $a_n \equiv \xi_n^{(+)} - \xi_n^{(-)}$ . Коришћењем дефиниционе једначине низова  $\xi_n^{(\pm)}$ , уочимо да важи следећа рекурентна релација:  $a_{n+1}^2 = a_n^2 + \frac{4QC}{\mu}$ , са почетним условом  $a_0 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$   $\boxed{1\text{п}}$ . Како, према претпоставци задатка, величина  $Q$  не зависи од  $n$  јер се током испаравања сваки пут изгуби исти удео масе комете и зато што је  $v_e$  константно, закључујемо да низ  $a_n^2$  представља једну геометријску прогресију, те лако долазимо до зависности елемената низа од броја  $n$ .

Сада су елементи низа  $a_n$  дати са:  $a_n = \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 + \frac{4Q}{\mu} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) n}$   $\boxed{1\text{п}}$ . Према томе, коначно решење

за  $\xi_n^{(\pm)}$  гласи:  $\xi_n^{(\pm)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 + \frac{4Q}{\mu} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) n} \right) \boxed{1\text{п}}$ . Видимо да се  $\xi^{(-)} = 1/r_{2,n}$  полако смањује са повећањем  $n$ . Тренутак када комета напушта гравитационо поље Сунца, одговара преласку из елиптичне у хиперболичку орбиту, односно услови  $r_{2,N} \rightarrow \infty$ , тј.  $\xi_N^{(-)} = 0$ . Из овог услова, за број орбита

које ће комета направити око Сунца, добијамо:  $N = \left\lfloor \frac{\mu}{Q(r_1+r_2)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2\mu}{v_e^2(r_1+r_2)} \left(1 - \frac{m}{\Delta m}\right)^2 \right\rfloor \boxed{1\text{п}}$ .

4. Како је мехур у сваком тренутку приближно сферног облика његова запремина се може апроксимирати формулом  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Нека је брзина ваздуха на средини горњег краја цеви (коју дефинишемо као тачку 2)  $v_2$ . Како је ваздух нестишљив флуид важи једначина континуитета, која поприма облик  $\frac{dV}{dt} = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} = v_2 S \boxed{3\text{п}}$ . Нека је брзина ваздуха у најнижој тачки мехура (тачка 1) једнака  $v_1$ . Брзина којом се помера зид сапунице у најнижој тачки је приближно  $2\frac{dR}{dt}$  зато што је растојање од доње тачке мехура до грла цеви приближно  $2R$ , грло цеви је фиксно и пречник цеви је мали у поређењу са пречником мехура. Брзина ваздуха у најнижој тачки једнака је брзини којом се креће зид у најнижој тачки, тј.  $v_1 = 2\frac{dR}{dt} \boxed{2\text{п}}$ . Због цилиндричне симетрије у сваком тренутку постоји струјна линија која спаја тачке 1 и 2, те се може написати Бернулијева једначина  $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 \boxed{3\text{п}}$ , где смо занемарили утицај гравитације у смислу  $\rho gh$  члана у Бернулијевој једначини. У њој фигуришу притисци  $p_1 = \frac{4\gamma}{R} + P_{\text{atm}} \boxed{3\text{п}}$  и  $p_2 = P_{\text{atm}} \boxed{1\text{п}}$ . Одавде следи диференцијална једначина за радијус мехура у функцији времена  $\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{2\gamma}{\rho R} \cdot \frac{1}{\frac{4\pi^2 R^4}{S^2} - 1} \boxed{3\text{п}}$ . Диференцијалну једначину можемо преписати увођењем смене  $u = \frac{\pi R^2}{S}$ , чији је физички смисао однос величине највећег попречног пресека мехура и попречног пресека цеви. Балон



почиње своје издувавање у тачки  $u_0 = \frac{\pi R_0^2}{S}$  и према напомени из текста задатка га завршава у  $u = 1$ . Применом  $\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{S}{4\pi u}} \frac{du}{dt}$  добија се диференцијална једначина  $(\frac{du}{dt})^2 = \kappa^2 \frac{\sqrt{u}}{4u^2-1}$ , где је  $\kappa^2 = \frac{8\gamma}{\rho} \sqrt{\frac{\pi^3}{S^3}}$ . Методом сепарације варијабли добија се  $u^{-1/4} \sqrt{4u^2-1} du = -\kappa dt$ . Границе интеграције су од  $u = u_0$  до  $u = 1$  и од  $t = 0$  до  $t = T$  (време издувавања мехура). Добијамо:  $T = \frac{1}{\kappa} \int_{u_0}^1 u^{-1/4} \sqrt{4u^2-1} du$ . Ово је тачан аналитички резултат. За велике вредности  $u_0$  могуће је апроксимирати  $\sqrt{4u^2-1} \approx 2u$ . Ово даје  $T \approx \frac{2}{\kappa} \int_1^{u_0} u^{3/4} du = \frac{8}{7\kappa} (u_0^{7/4} - 1)$ , односно  $T \approx \frac{2}{7} \sqrt{\frac{2\rho}{\gamma}} \left(\frac{S}{\pi}\right)^{3/4} \left[\left(\frac{\pi R_0^2}{S}\right)^{7/4} - 1\right]$  **5п**. Исти резултат за време издувавања се добија из претпоставке да је  $v_1 \approx 0$ .

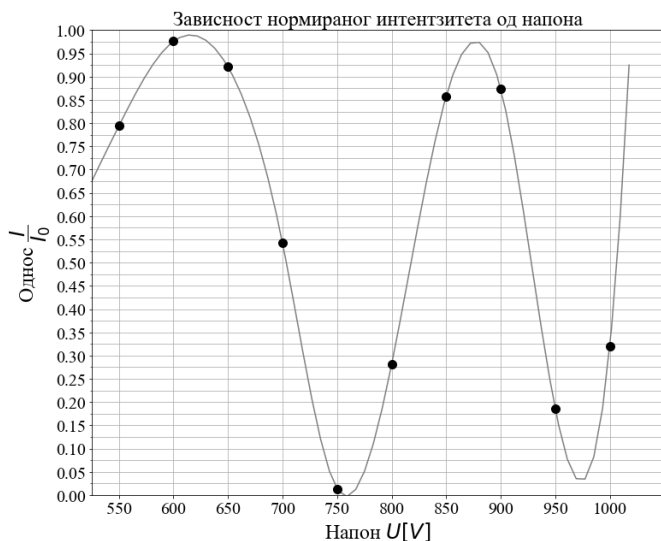
**Напомена:** Уколико је ученик за тачку 1 узео центар балона и претпоставио да је  $v_1 \approx 0$  добиће се једначина  $(\frac{dR}{dt})^2 = \frac{\gamma S^2}{2\pi^2 \rho R^5}$  коју треба вредновати са **1п**. Ако је остатак рачуна тачан признати све поене.

5. (а) Електрично поље упадног таласа можемо да разложимо на паралелну и нормалну компоненту у односу на спољашње електрично поље:  $\vec{E}_{\parallel}(z,t) = E_{0\parallel} \cos(k_{\parallel}z - \omega t) \vec{e}_x$  и  $\vec{E}_{\perp}(z,t) = E_{0\perp} \cos(k_{\perp}z - \omega t) \vec{e}_y$ , респективно **0.5п**. Користећи да је таласни број у средини  $k = \frac{\omega}{c} n$ , у сваком тренутку на позицији  $z = L$  фазна разлика  $\Delta\varphi$  између ове две компоненте износи  $\Delta\varphi = L(k_{\parallel} - k_{\perp}) = L \frac{\omega}{c} \Delta n$ , **0.5п**. Изражавањем  $\omega$  преко таласне дужине  $\lambda$ ,  $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ , добијамо да је фазна разлика дата са:  $\Delta\varphi = 2\pi L K E^2$  **1п**.

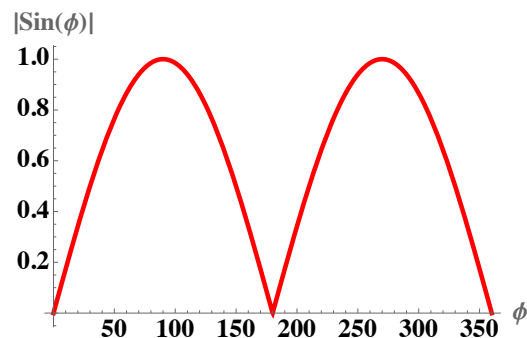
(б) (i) Укупно електрично поље упадног таласа се може представити преко своје паралелне и нормалне компоненте као  $\vec{E}(z,t) = \vec{E}_{\parallel}(z,t) + \vec{E}_{\perp}(z,t)$  (уз претходно наведене дефиниције за  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\perp}$ ). Из чињенице да је упадно електрично поље под углом од  $45^\circ$  између  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_y$  осе, након проласка кроз први поларизатор, паралелна и нормална компонента електричног поља су исте, тј.  $E_{0\parallel} = E_{0\perp} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ , где је  $E_0$  јачина упадног електричног поља **1п**. Јачина електричног поља која излази из другог поларизатора  $E_{iz}$  је дата скаларним производом електричног поља и осе поларизатора 2, тј.  $\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_y - \vec{e}_x)$  (ово је други начин да се искаже Малусов закон). Овај скаларни производ даје  $E_{iz} = \vec{E}(L,t) \cdot \vec{n}_2 = E_0 \sin(\frac{L}{2}(k_{\parallel} + k_{\perp}) - \omega t) \sin(\frac{L}{2}(k_{\parallel} - k_{\perp}))$  **1п**. Средњи интензитет светлости  $I$  која излази из другог поларизатора пропорционалан је квадрату јачине електричног поља усредњеном по времену  $I = a \langle E_{iz}^2 \rangle_T$ , где је  $a$  константа пропорционалности. Према томе:  $I = a E_0^2 \sin^2(\frac{L}{2}(k_{\parallel} - k_{\perp})) \langle \sin^2(\frac{L}{2}(k_{\parallel} + k_{\perp}) - \omega t) \rangle_T = I_0 \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$  **1п**, где је  $I_0 = a \frac{E_0^2}{2}$ , јер је интеграл  $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(C - \omega t) dt = \frac{1}{2}$  (где је  $C = \frac{L}{2}(k_{\parallel} + k_{\perp})$  константа у односу на временску интеграцију, а  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  је период).

(ii) Са графика 2 се читавају вредности напона и нормираног интензитета са грешком од пола најмањег подеока 0,0125. Грешку мајорирамо на  $\Delta(I/I_0) = 0,013$  **1п**. Електрично поље кондензатора је  $E = \frac{U}{d}$ . Из претходних делова задатка следи да је  $U^2 = \frac{d^2}{2\pi L K} \Delta\varphi$ . Одавде видимо да можемо да нацртамо линеаран график зависности  $U^2(\Delta\varphi)$ . Из нагиба оптималне праве се добија Керова константа. Нагиб праве је једнак  $m = \frac{d^2}{2\pi L K}$ , па је Керова константа  $K = \frac{d^2}{2\pi L m}$  **1п**. Релативна грешка за вредност Керове константе се може добити из израза  $\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta m}{m}$ . Грешка квадрата напона се рачуна на следећи начин:  $\Delta(U^2) = 2U\Delta U$ , уз  $\Delta U = 5V$  **1п**. При рачуну фазне разлике треба водити рачуна да је функција  $\arcsin(x)$  дефинисана само у интервалу  $(-\pi/2, \pi/2)$ , до на  $n\pi$  где је  $n$  цео број. Фазна разлика расте са порастом напона на електродама. Дакле, треба разматрати  $|\sin(\phi)|$ , јер је  $\sqrt{I/I_0}$  позитиван број (видети слику 3). Са слике се може закључити да се вредност  $\phi$  у различитим интервалима рачуна као:

- у интервалу  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\phi = \arcsin\left(\sqrt{\frac{I}{I_0}}\right)$ , што одговара напону у интервалу  $U \in [550V, 600V]$ ,
- у интервалу  $\phi \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\phi = \pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{I}{I_0}}\right)$ , што одговара напону у интервалу  $U \in [650V, 750V]$  **0.5п**,
- у интервалу  $\phi \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$ ,  $\phi = \pi + \arcsin\left(\sqrt{\frac{I}{I_0}}\right)$ , што одговара напону у интервалу  $U \in [800V, 850V]$  **0.5п**,
- у интервалу  $\phi \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ,  $\phi = 2\pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{I}{I_0}}\right)$ , што одговара напону у интервалу  $U \in [900V, 950V]$  **0.5п**,
- у интервалу  $\phi \in [2\pi, \frac{5\pi}{2})$ ,  $\phi = 2\pi + \arcsin\left(\sqrt{\frac{I}{I_0}}\right)$ , што одговара напону само у тачки са графика  $U = 1000V$  **0.5п**.



Слика 2: Подаци за обраду у задатку 5.



Слика 3: Функција  $|\sin(\phi)|$  за анализу ко-домена функције, коришћен за рачунање раста фазне разлике у зависности од раста напона на електродама

Како је  $\Delta\varphi = 2\arcsin\left(\sqrt{I/I_0}\right)$ , грешка фазне разлике дата је са  $\Delta\varphi = \frac{\Delta(I/I_0)}{\sqrt{1-I/I_0}\sqrt{I/I_0}}$  **1п**. Графички приказ квадрата напона у зависности од фазне разлике дат је на слици 4. Одабиром обележених тачака  $A$  и  $B$  (тако да је  $A$  између прве две тачке на графику, а  $B$  између последње две) рачунамо коефицијент правца  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1043,5 \frac{\text{V}^2}{\text{rad}}$ , **1п**, са релативном грешком  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta y_A + \Delta y_B}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{x_B - x_A}$  **1п**. Грешке  $\Delta x_{A,B}$  и  $\Delta y_{A,B}$  се бирају као веће од грешака суседних тачака, тачакама  $A$  и  $B$  респективно. Одавде следи да је Керова константа једнака  $K = (3,48 \pm 0,13) \times 10^{-9} \frac{\text{m}}{\sqrt{2}}$  **2п**. График носи **5п**. Што се тиче табеле, колоне  $U$  и  $I/I_0$  носе по **0.5п**, док колоне  $U^2$ ,  $\Delta(U^2)$ ,  $\Delta\varphi$  и  $\Delta(\Delta\varphi)$  носе по **1п**. Колона  $2\arcsin\sqrt{I/I_0}$  не носи поене.

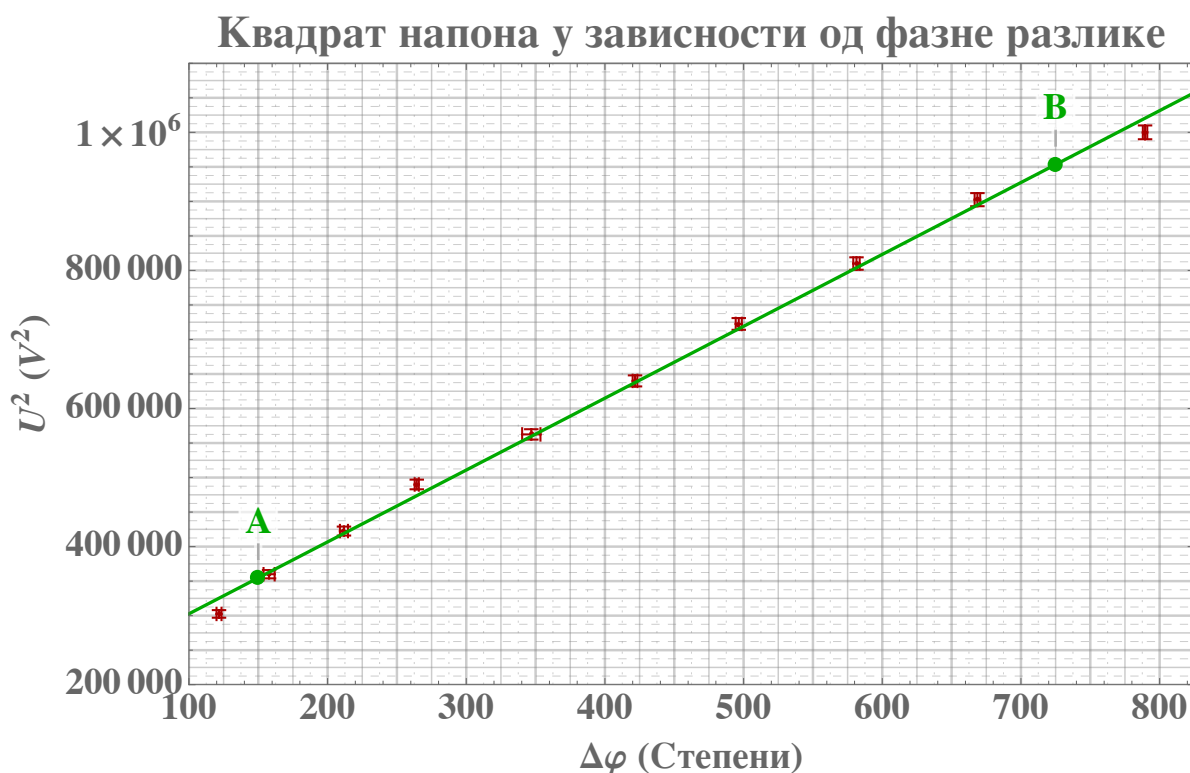
Негативни поени за график и заокруживање вредности у табели:

- \* Вредности колоне у табели нису тачно заокружене: **-1п** за колоне  $\Delta\varphi$  и грешку у  $\Delta\varphi$ , и **-0.5** за остале колоне,
- \* Координате осе треба нацртати по ивицама милиметарског папира, **-0.3п**
- \* График је приказан без наслова **-0.3п** (наслов није  $y = f(x)$ ),
- \* Лоша размера (график заузима мање од 1/4 простора папира) **-0.5п**,
- \* Лоша размера подеока **-0.8п**,
- \* Осе нису обележене величином коју представљају **-0.5п**,
- \* Осе нису обележене јединицама **-0.5п**,
- \* Унете су мерене бројне вредности на осе **-0.3п**,
- \* Повлачене линије од оса до нанетих тачака **-0.5п**,
- \* Ако  $A$  ( $B$ ) није изабрано да буде између прве и друге (последње и претпоследње) тачке на графику **-1п**,
- \* Лоше унете (или изостављене) вредности тачкама **-0.5п**,
- \* Лоше унете (или изостављене) вредности грешака за сваку тачку **-0.5п**



$U$ [V]	$U^2$ [ $\times 10^3 V^2$ ]	$\Delta(U^2)$ [ $\times 10^3 V^2$ ]	$\frac{I}{I_0}$	$2\arcsin\sqrt{\frac{I}{I_0}}$	$\Delta\varphi$	$\Delta(\Delta\varphi)$
550	302,5 <b>303</b>	5,5 <b>6</b>	0,763	121,797	121,797 <b>121,8</b>	1,68 <b>1,7</b>
600	360,0 <b>360</b>	6,0 <b>6</b>	0,963	157,899	157,899 <b>158</b>	3,79 <b>4</b>
650	422,5 <b>423</b>	6,5 <b>7</b>	0,925	148,2	211,713 <b>212</b>	2,72 <b>3</b>
700	490,0 <b>490</b>	7,0 <b>7</b>	0,550	95,7	264,212 <b>264,2</b>	1,44 <b>1,5</b>
750	562,5 <b>563</b>	7,5 <b>8</b>	0,013	13,1	346,899 <b>347</b>	6,33 <b>7</b>
800	640,0 <b>640</b>	8,0 <b>8</b>	0,263	61,7	421,737 <b>421,7</b>	1,63 <b>1,7</b>
850	722,5 <b>723</b>	8,5 <b>9</b>	0,863	136,5	496,62 <b>496</b>	2,08 <b>3</b>
900	810,0 <b>810</b>	9,0 <b>9</b>	0,875	138,6	581,339 <b>581</b>	2,17 <b>3</b>
950	902,5 <b>903</b>	9,5 <b>10</b>	0,188	51,4	668,583 <b>668,6</b>	1,83 <b>1,9</b>
1000	1000,0 <b>1000</b>	10,0 <b>10</b>	0,325	69,5	789,547 <b>789,5</b>	1,53 <b>1,6</b>

Таблица 1: Табела података за задатак 5. Колона  $2\arcsin\sqrt{I/I_0}$  се не мора јављати у коначној табели, али се вредности морају израчунати. Вредности са грешкама од  $\Delta\varphi$  су написане у степенима.



Слика 4: График зависности квадрата напона од фазне разлике између нормално и паралелно поларизоване светлости у односу на електрично поље између електрода. Са графика се могу очитати вредности за тачке  $A(150, 350000)$  и  $B(725, 950000)$ .