



IV
РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије

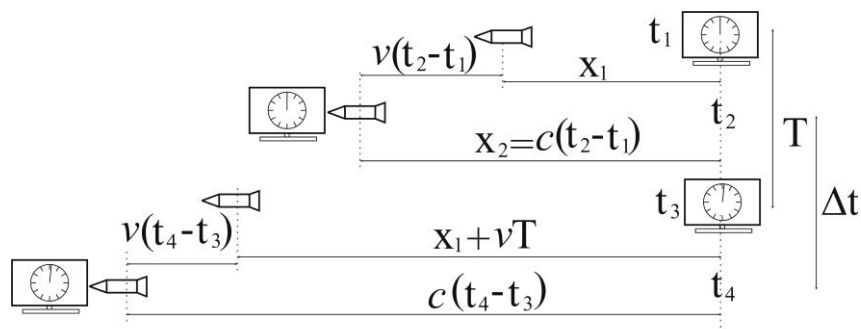
ОПШТИНСКИ НИВО
04.02.2023.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА Алфа

1. **I Начин:** У унутрашњости Земље гравитациона сила је $F_1 = \gamma \frac{mM(x)}{x^2}$ где је $x < R$ растојање од центра а $M(x)$ је маса Земље унутар сфере полупречника x , тј. $F_1(x) = \gamma \frac{mM}{R^3} x$ (3п). Када се тело дигне изнад површине гравитациона сила се мења по закону ($x > R$) $F_2(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ (3п). Елементарни радови при дизању тела за малу висину се рачунају као $dA_1 = F_1(x)dx$ и $dA_2 = F_2(x)dx$ (2+2п). Укупан рад се добија као збир елементарних радова, тј. интеграл елементарних радова у границама од почетне ($x = R/2$) до површине ($x = R$) у утроби земље и од површине ($x = R$) до висине ($x = 3R/2$) као $A_1 = \int_{R/2}^R F_1(x)dx = \frac{3}{8} \gamma \frac{mM}{R}$ (2+2п) и $A_2 = \int_R^{3R/2} F_2(x)dx = \frac{1}{3} \gamma \frac{mM}{R}$ (2+2п). Тако је тражени однос $\frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{8}$ (2п).
- II Начин:** За оне који још не баратају са интегралима решење се може наћи коришћењем малих помака Δx , при којем сматрамо да је сила константна. У унутрашњости Земље гравитациона сила је $F_1 = \gamma \frac{mM(x)}{x^2}$ где је $x < R$ растојање од центра а $M(x)$ је маса Земље унутар сфере полупречника x , тј. $F_1(x) = \gamma \frac{mM}{R^3} x$ (3п). Када се тело дигне изнад површине гравитациона сила се мења по закону ($x > R$) $F_2(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ (3п). Елементарни радови при дизању тела за малу висину се рачунају као $\Delta A_1 = F_1(x)\Delta x = \gamma \frac{mM}{R^3} x\Delta x$ и $\Delta A_2 = F_2(x)\Delta x = \gamma mM \frac{\Delta x}{x^2}$ (2+2п). Укупан рад се добија као збир елементарних радова. Како се сумирања врше од нуле, треба израчунати рад код прве силе до $x = R/2$, па до $x = R$ и та дава рада одузети. $A_1 = \gamma \frac{mM}{R^3} \left(\sum^R x\Delta x - \sum^{R/2} x\Delta x \right) = \gamma \frac{mM}{R^3} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{8} \right) = \frac{3}{8} \gamma \frac{mM}{R}$ (2+2п) и $A_2 = \gamma mM \left(\sum^{3R/2} \frac{\Delta x}{x^2} - \sum^R \frac{\Delta x}{x^2} \right) = \gamma mM \left(\frac{4}{3R} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{3} \gamma \frac{mM}{R}$ (2+2п). Тако је тражени однос $\frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{8}$ (2п).
2. Закон одржавања енергије пре и после расејања гласи $\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} + mc^2 + mc^2$ (3п). Одавде се добије $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} + mc^2$ или кад се замени Комптонова таласна дужина $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ (1п) једначина прелази у $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} + \frac{1}{\lambda_C}$ (2п). После краће трансформације се добија квадратна једначина по таласној дужини $\lambda^2 + \Delta\lambda \cdot \lambda - \lambda_C \Delta\lambda = 0$ (3п). Промена таласне дужине фотона се може изразити из Комптоновог ефекта (уз услов $\theta = 180^\circ$) $\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\lambda_C$ (3п). Сада је квадратна једначина облика $\lambda^2 + 2\lambda_C \cdot \lambda - 2\lambda_C^2 = 0$ (1п). Решења ове једначине су $\lambda_{1,2} = \lambda_C(-1 \pm \sqrt{3})$ (2п). Физички смисао има само позитивно решење $\lambda = \lambda_C(\sqrt{3} - 1)$ (2п) Коначно је енергија фотона $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} mc^2 = 1.12 \cdot 10^{-13} J$ (2+1п).
3. За све сударе важи закон одржања импулса $p_A + p_B = p_C$ (3п) (стим да је $p_B = 0$), али за апсолутно нееластичне сударе такође мора да важи и закон одржања укупне енергије $\sqrt{m_A^2 c^4 + p_A^2 c^2} + m_B c^2 = \sqrt{m_C^2 c^4 + p_C^2 c^2}$ (4п). Уврштавањем величина из услова задатка ($m_C = 2.5 m$) добија се једначина $\sqrt{m^2 c^4 + p_A^2 c^2} + mc^2 = \sqrt{\frac{25}{4} m^2 c^4 + p_A^2 c^2}$ (3п). Када се једначина квадрира и скрати добија се $\sqrt{m^2 c^4 + p_A^2 c^2} = \frac{17}{8} mc^2$ (2п), која се поново квадрира и даје $p_A^2 c^2 = \frac{225}{64} m^2 c^4$ (2п), односно $p_A = \frac{15}{8} mc = 2.7 \cdot 10^{-16} \frac{kgm}{s}$ (4+2п).

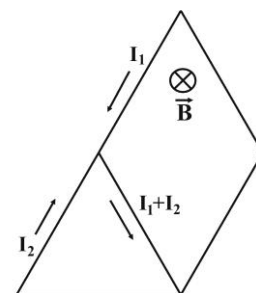


4. Обележимо са t_1 тренутак када је секундара скочила на 12. У том моменту нека је свемирски брод удаљен x_1 од Земље. Тај сигнал ће се примити на броду у тренутку t_2 по земаљском часовнику. Ракета се тада налази на растојању x_2 , до којег је сигнал дошао брзином светлости, тако да важи



$x_2 = c(t_2 - t_1)$ (2п) и тај положај је од првобитног положаја брода померен за $v(t_2 - t_1)$ (2п). Дакле важи $x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$ (3п) односно $x_1 = (c - v)(t_2 - t_1)$ (1п). Следећа промена на екрану на Земљи се дешава после времена T на земаљском часовнику (где је $T = 1$ s). У том тренутку ракета се налази на растојању $x_1 + vT$ (1п) од Земље. У тренутку $t_2 + \Delta t$ сигнал стиже до брода. Од слања и стицања другог сигнала брод се померио за $v(t_4 - t_3)$ (1п) а сигнал прешао пут $c(t_4 - t_3)$ (1п). Тако важи једначина $c(t_4 - t_3) = v(t_4 - t_3) + x_1 + vT$ (3п) односно уврштањем x_1 , $t_3 = t_1 + T$ (1п) и $t_4 = t_2 + \Delta t$ (1п) се добија $(c - v)(t_2 + \Delta t - (t_1 + T)) = (c - v)(t_2 - t_1) + vT$ (2п). Из ових једначина се може израчунати Δt , као $\Delta t = \frac{c}{c-v} T$ (3п). Ово време представља разлику времена између два сигнала на свемирском броду, али рачунајући по времену на Земљи (у систему који мирује- догађаји су на истом месту). Како се пријем сигнала врши на свемирском броду (систем који се креће) и то на истом месту у том систему, може се применити формула за дилатацију времена како би се израчунало време промене екрана на бродском телевизору $\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} T = 1.73$ s (3+1п).

5. Пре затварања прекидача индукована електромоторна сила у контури је $\frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt} = \alpha S$ (2п), где је са S обележена површина рама. Ова електромоторна сила се јавља у контури и изједначавамо је са падом напона који добијамо од индуковане струје која тече: $\alpha S = 5IR$ (2п), где је R отпорност једне странице, а I струја која тече кроз рам у овом случају. Када затворимо прекидач, рам делимо на два дела различитих површина. Струје и њихове смерове обележимо као на слици. Индуковане електромоторне силе се јављају у обе контуре, али због различите површине њихове вредности су различите од предходне. За горњу контуру једначине су идентичне као пре затварања прекидача: $\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{2}{3} \alpha S = 3I_1 R + (I_1 + I_2)R = (4I_1 + I_2)R$ (2п). За доњи троугао: $\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{1}{3} \alpha S = -2I_2 R - (I_1 + I_2)R = -(I_1 + 3I_2)R$ (2п). Када другу једначину помножимо са 2 и одуземо од прве добија се веза између струја $I_1 = -\frac{7}{6} I_2$ (2п). Како је струја пре затварања прекидача (из збира последње две једначине изједначене са једначином пре затварања прекидача $5IR = (3I_1 - 2I_2)R$, тј. $I_1 = \frac{35}{33} I$, $I_2 = -\frac{10}{11} I$ (2п). Ослобођена снага пре и после укључивања прекидача су $P_1 = 5I^2 R$ (1п) и $P_2 = I_1^2 3R + (I_1 + I_2)^2 R + I_2^2 2R = 5.05 I^2 R$ (1п). Однос снага је $\frac{P_2}{P_1} = 1.01$ (1п) – тојест у другом случају се ослобађа 1% веће снаге.



НАПОМЕНА: ако је ученик без икаквог додатног објашњења решавао или доцртавао батерије без коментара (као еквивалент ефектима електромагнетне индукције) и онда писао Кирхофове законе, рад треба оценити са коефицијентом 0.8 (нпр. ако је урадио све добро али је доцртавао батерије треба дати $0.8 * 15 = 12$ поена). Овај коефицијент се уводи јер се добијају различити резултати у зависности од тога да ли се те батерије ставе на дијагоналу или на страницу, па ако нема додатног објашњења подразумева се да је ученик имао среће и да их је случајно нацртао на местима која дају тачно решење.