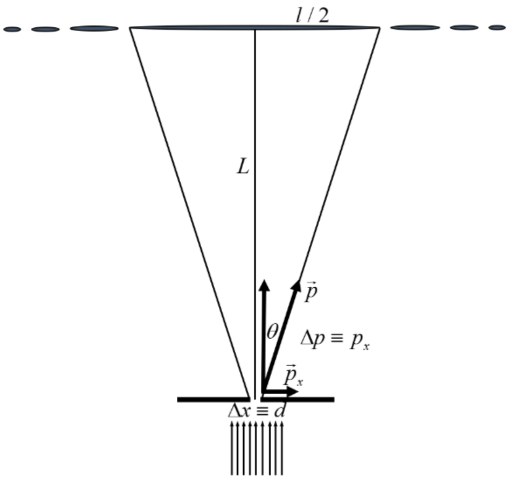
IV РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – Алфа категорија

ОКРУЖНИ НИВО
18.03.2023.

1. Разлика енергије позитрона пре и после убрзавања је једнака раду који је електрично поље извршило на њега $A = |e|U$ и реда је величине енергији која одговара маси мировања електрона $m_p = 0{,}511\ \mathrm{MeV/c^2}$, због чега се морају узети у обзир релативистички ефекти. Закон одржања енергије је облика $\sqrt{m_p{}^2c^4 + p_p{}^2c^2} - m_pc^2 = |e|U$ **[4п]**. Ако се једначина квадрира и скрате се енергије мировања, једначина која се добије је облика $p_p{}^2c^2 = 2m_pc^2\ |e|U + (eU)^2$ **[2п]**, односно импулс протона се рачуна као $p_p = \frac{1}{c}\sqrt{2m_pc^2\ |e|U + (eU)^2}$ **[3п]**. На крају када се ово уврсти у једначину за де Бројлијев талас $\lambda_d = \frac{h}{p_p} = \frac{hc}{\sqrt{2m_pc^2\ |e|U+(eU)^2}} = 1{,}42 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}$ **[4+2п]**.

2. Неодређеност *x*-координате фотона износи $\Delta x = x$ **[2п]**, док је неодређеност импулса $\Delta p = p_x$ **[2п]**. Импулс фотона се може одредити де Брољевом релацијом $p = \dfrac{h}{\lambda}$ **[3п]**, где је $p_x = p \cdot \sin\theta$ **[2п]**. Како је $L >> l$, можемо користити апроксимацију $p_x \approx p \cdot \tan\theta$ **[3п]**, где је $\tan\theta = \dfrac{l}{2L}$. Полазећи од релација неодређености $\Delta x \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$ **[2п]**, узимајући једнакост и замењујући горње величине долазино до израза за процену ширине централног прореза $l = \dfrac{\lambda L}{2\pi d} \approx 4{,}23\mathrm{cm}$ **[5+1п]**.



3. а) Минимална енергија честице одговара максималној де Брољевој таласној дужини коју честица има. Стојећи талас максималне дужине би одговарао случају када је ширина баријере једнака половини де Брољеве таласне дужине $L = \dfrac{\lambda}{2}$ **[1п]**, где је $\lambda = \dfrac{h}{p}$ **[1п]**, тј. $p = \dfrac{h}{2L}$. Минимална енергија честице је $E_{\min} = \dfrac{p^2}{2m}$ **[1п]**, тј. $E_{\min} = \dfrac{h^2}{8mL^2}$ **[2п]**.

б) За n-ти енергетски ниво *n* целобројних половина таласних дужина честице се мора уклопити у ширину баријере $L = \dfrac{\lambda}{2} \cdot n$ **[2п]**, на основу чега је импулс честице у n-том енергетском нивоу $p_n = \dfrac{hn}{2L}$, тј. енергија је $E_n = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{h^2n^2}{8mL^2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **[3п]**.

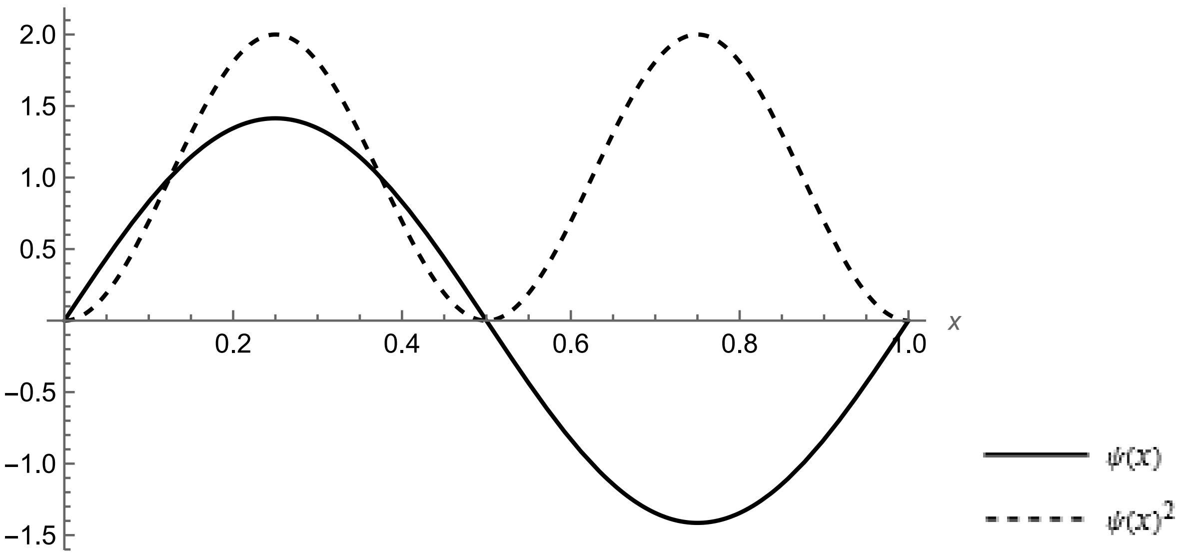
в) Таласна дужина коју честица емитује при прелазу са *m*-тог на *n*-ти енергетски ниво износи $\lambda = \dfrac{hc}{\Delta E}$ **[1п]**, где је $\Delta E = E_m - E_n$ **[1п]**. Таласна дужина износи $\lambda = \dfrac{8mL^2c}{h\left(m^2 - n^2\right)}$ **[3п]**.

г) Физички смисао има квадрат модула талсне функције и представља густину вероватноће налажења електрона у одређеном делу простора. Највероватнији положај се може одредити изједначавањем првог извода на нулом, тј. $\frac{d|\psi|^2}{dx}=0$ **[1п]**. Заменом таласне функције у израз, израчунавањем и извода долазимо до услова за екстремну вредност $\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}=0$ **[0,5п]**.

Једно од решења једначине је $\sin\frac{n\pi x}{L}=0$ **[0,5п]**, одакле је $\frac{n\pi x}{L}=k\pi,\ k=0,1,2,...$ **[0,5п]**. За прво побуђено стање $n=2$ и на интервалу $0\le x\le L$ долазимо до решења $x=0,\ x=\frac{L}{2},\ x=L$ **[0,5п]**. Тражењем другог извода може се одредити да ли се ради о минимумима или максимумима, али је очигледно да ова решења одговарају минимуму, јер таласна функција на крајевима интервала има чворове и како се ради о првом побуђеном стању, $L=\lambda$ и функција мора променити знак на половини интервала, што нам говори да се ради о миминуму квадрата таласне ф-је.

Друго решење је $\cos\frac{n\pi x}{L}=0$ **[0,5п]**, одакле је $\frac{n\pi x}{L}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k=0,1,2,...$ **[0,5п]** и на интервалу $0\le x\le L$ долазимо до решења $x=\frac{L}{4},\ x=\frac{3L}{4}$ **[1п]**.

Графички, густина вероватноће је изгледа као на слици за $n=2$ и $L=1$.



д) Израчунајмо првенствено $\langle x\rangle=\int_0^L\psi_n x\psi_n dx$ и $\langle x^2\rangle=\int_0^L\psi_n x^2\psi_n dx$ за $n=1$, тј. $\langle x\rangle=\frac{2}{L}\int_0^L x\sin^2\frac{\pi x}{L}dx$ **[0,5п]** и $\langle x^2\rangle=\frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin^2\frac{\pi x}{L}dx$ **[0,5п]**. Коришћењем интеграла у поставци задатка добија се да је $\langle x\rangle=\frac{L}{2}$ **[0,5п]** и $\langle x^2\rangle=\frac{L^2}{6}\left(2-\frac{3}{\pi^2}\right)\approx0,283L^2$ **[0,5п]**. Неодређеност координате је $\Delta x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}$, тј. $\Delta x=0,18L$ **[1п]** (или $\Delta x=\sqrt{\frac{\pi L^2}{6}\left(2-\frac{3}{\pi^2}\right)-\frac{L^2}{4}}$). На основу релација неодређености минимална неодређеност импулса је $\Delta p_x=\frac{\hbar}{2\Delta x}$ **[0,5п]** $\Delta p_x=\frac{h}{4\pi\Delta x}\approx0,44\frac{h}{L}$ **[1,5п]**.

4. Фотон избије електрон из плоче почетном кинетичком енергијом E_k, која се може изразити из Ајштајнове једначине за фотоефекат: $h\frac{c}{\lambda} = A_i + E_k$ **[4п]**. Када фотон напусти плочу, на њега делује сила електричног поља $F = eE = kex$ **[2п]**, па је по II Њутновом закону једначина кретања електрона $ma = -kex$ **[3п]**. Ова сила је усмерена ка плочи, тако да се сила понаша као реституциона сила са равнотежним положајем на површини плоче. Једначина кретања има исти облик као једначина хармонијског осциловања са кружном учесталошћу $\omega = \sqrt{\frac{ke}{m}}$ **[3п]**. Брзина коју има електрон када напусти плочу одговара брзини коју би имао осцилатор када пролази кроз равнотежни положај, а пут који пређе електрон до заустављања једнак је амплитуди одговарајућег осцилатора. Дакле $x_o = \frac{v_o}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{ke}}\sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2(hc-\lambda A_i)}{ke\lambda}}$ **[3п]**. Време заустављања је једнака четвртини периода осцилатора: $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{ke}}$ **[5п].**

5. Наелектрисање који је изнад бесконачне металне плоче индукује у плочи наелектрисање, чије је поље идентично тачкастом наелекрисању супротног знака, који се налази на огледалски пресликаном месту иза плоче (слика 1.). Тако можемо бесконачну плочу заменити са два наелектрисања, $-q_1$ и $-q_2$ **[1п]**. На наелектрисање q_1 осим гравитационе силе и силе одбијања од друге куглице F_{12} делују и привлачне силе од два негативна „лика“ (F_{1-1} и F_{1-2}). Пошто се куглуце могу померати само вертикално, односно ротирати око ослонца О, услов равнотеже је да сви збирови момената које делују око тачке О буду једнаки нули. Силе F_{12} и F_{21} делују дуж штапа, тако да су им моменти нуле. Гравирациона и сила између наелектрисања и његовог лика F_{1-1} стоје нормално на крак силе и њихов момент силе се може израчунати у скаларном облику као крак пута сила. Са друге стране момент силе између остала два наелектрисања (наелектрисање и лик другог наелектрисања) F_{1-2} стоји под углом α у односу на нормалу. Њен момент се може израчунати као крак силе пута пројекција силе на нормалу, тј. множи се са $cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ **[1п]**. Примећује се да су сви моменти једне куглице једног знака а друге супротног (односно прва куглица ротира теразије супротно а друга у правцу кретања сата) **[1п]**, док кракови сила се разликују по односу из задатка Момент са којим наелектрисање q_1 делује на осовину је $M_1 = 2d\left(mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1^2}{(2d)^2}\right) + 2d\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{(2d)^2+(3d)^2}$ **[3п]** а друго наелектрисање $M_2 = d\left(mg + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2^2}{(2d)^2}\right) + d\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{(2d)^2+(3d)^2}$ **[3п].** Уврштавањем услова за однос растојања и масе једначине постају: $M_1 = 2d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q_1^2+q_1^2}{4d^2}\right) + 2d\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{13d^2}$ **[2п]** и $M_2 = d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q_1^2+q_2^2}{4d^2}\right) + d\frac{2}{\sqrt{13}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{13d^2}$ **[2п]**. Из једнакости ове две једначине се добије (множи се са $4\pi\varepsilon_o \cdot d$) $\frac{10q_1^2}{4} + \frac{4q_1q_2}{13\sqrt{13}} = \frac{4q_1^2+q_2^2}{4} + \frac{2q_1q_2}{13\sqrt{13}}$ што се своди на квадратну једначину $q_2^2 - \frac{8q_1}{13\sqrt{13}}q_2 - 6q_1^2 = 0$ **[4п]**, чије је решење $q_2 = 29{,}72\ C$ **[1п]**. Ова једначина има и негативно решење за које обично кажемо да нема физичког смисла- оно износи $q_2 = -27{,}72\ C$ **[1п]**. У овом случају би наелектрисање q_2 било негативно, али у једнчинама би се променили смерови сила (предзнаци) које делују између два наелектрисања и првог наелектрисања и другог лика (пошто би сад то наелектрисање било позитивно). То знчи да и ово решење има стварни физички смисао, једино се коси са основном претпоставком задатка, да су наелектрисања позитивна **[1п]**.

Сва тачна решења која се разликују од кључа признати

Члановима комисије желимо успешан рад и пријатан дан!