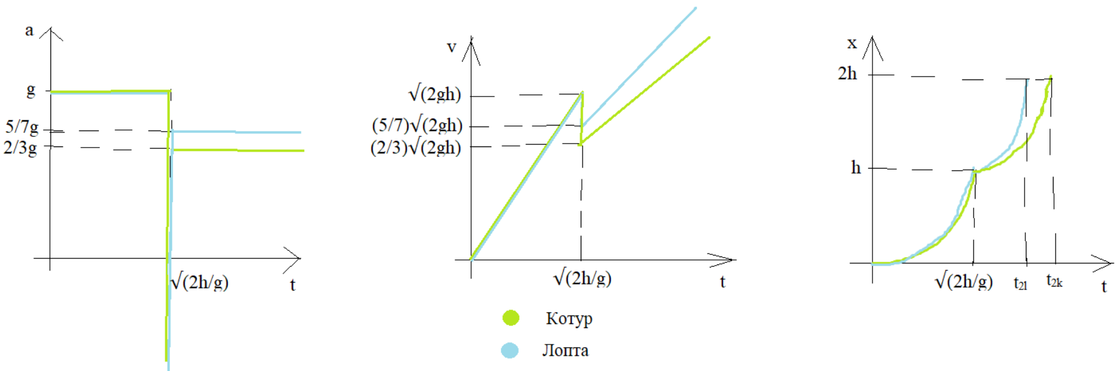
ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2021/2022. ГОДИНЕ.

IV разред

Друштво физичара Србије и Министарство просвете
Науке и технолошког развоја Републике Србије
РЕШЕЊА-АЛФА КАТЕГОРИЈА

ОКРУЖНИ НИВО
27. март 2022.

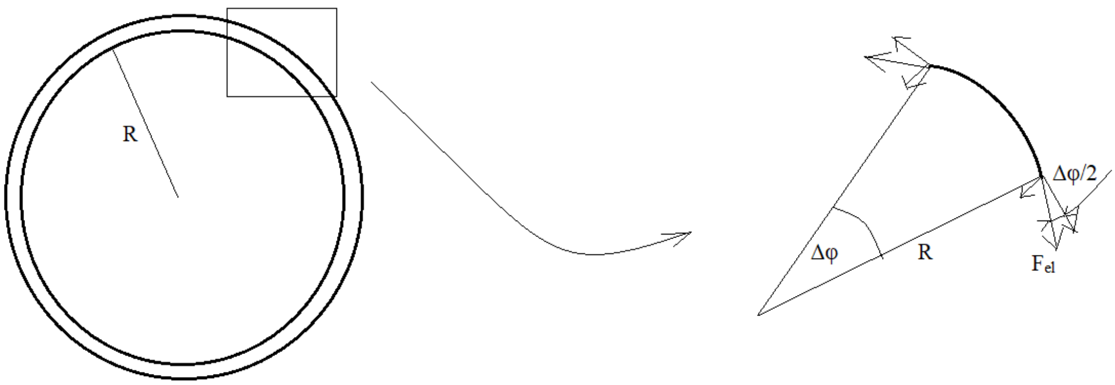
1. Разматрајмо решење у коме је момент инерције котура генерализован, и износи I. У почетном тренутку $t_0 = 0$, имамо$v_0 = 0$, $a_0 = a_1 = g$. Назовимо тренутак у ком тег поново истегне нит тренутак 1. До тренутка 1 тег слободно пада за висину h . Брзина на крају слободног пада је $v_1 = \sqrt{2gh}$**[1п],** време за које је тег слобоно падао је $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$**[1п].** У тренутку 1 моментално се деси трзај (уже се затегне и креће да се одмотава без клизања). На основу закона одржања момента импулса имамо: $mRv_1 = mRv_1^* + I\omega_1^* = mRv_1^* + I\frac{v_1^*}{R}$ **[5п]**,где јеv_1^*је брзина тега у тренутку 1 непосредно након трзаја. Из последњег следи $v_1^* = \frac{mR^2}{mR^2+I}v_1 = \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}\sqrt{2gh}$**[1п].** Убрзање након тренутка 1 налазимо помоћу другог Њутновог закона примењеног на овај систем, узимајући у обзир котрљање котура без клизања.Добијамо: $mg - T = ma_2$ (тег)**[2п]**,$TR = I\frac{a_2}{R}$ (котур)**[2п].** Из овога следи $a_2 = \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}g$**[1п].** Заменом последњег израза у формулу $v_2^2 = v_1^{*2} + 2a_2h$, добијамо $v_2 = \sqrt{2gh(\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}})^2 + 2gh\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}}$**[1п].** Време од тренутка 1 до тренутка 2 налазимо из $\Delta t_{12} = \frac{v_2 - v_1^*}{a_2}$, те је време од тренутка 0 до тренутка 2:$t_2 = t_1 + \Delta t_{12}$. За случај котура ($I = \frac{1}{2}mR^2$, индекс k) и лопте ($I = \frac{2}{5}mR^2$, индекс l), значајни подаци гласе:$a_{1l} = a_{1k} = g$; $a_{2l} = \frac{5}{7}g, a_{2k} = \frac{2}{3}g$; $v_{1l} = v_{1k} = \sqrt{2gh}$; $v_{1l}^* = \frac{5}{7}\sqrt{2gh}, v_{1k}^* = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$; $v_{2l} = \frac{2\sqrt{15}}{7}\sqrt{2gh}, v_{2k} = \frac{\sqrt{10}}{3}\sqrt{2gh}$; $t_{1l} = t_{1k} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; $t_{2l} = \frac{2\sqrt{15}}{5}\sqrt{\frac{2h}{g}}, t_{2k} = \frac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$.На основу поређења времена до тренутка 2 видимо да до $2h$ побеђује Ивин тег са куглом, а до hоба стижу у исто време, слободним падом. На основу података формирани су графици**[подаци 2п + графици 4п].**



2.а) За потенцијалну јаму димензија L_xиL_yимамо $L_x = n_x\frac{\lambda_x}{2}$ и $L_y = n_y\frac{\lambda_y}{2}$**[4п]**(услови стојећих таласа у оба правца), а из Де Брољеве релације $\lambda_x = \frac{h}{p_x}$и $\lambda_y = \frac{h}{p_y}$**[2п]**,па је$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}}$**[2п].**Заменом формуле за импулс у формулу за кинетичку енергију(а уједно и укупну, јер је потенцијална једнака нули) добијамо
$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8m}(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2})$**[2п].**

б) Нека је 2,6nmдужина, а 0,3nm ширина јаме, и нека је *(n_x, n_y)* једна комбинација енергетских нивоа. Електрона има 22, тако да ће бити смештени у укупно 11 различитих енергетских нивоа. Како је свака комбинација квантних бројева могућа, а реципрочна вредност квадрата ширине јаме знатно већа од исте за дужину, може се очекивати да у процесу ређања енергетских нивоа доминира квантни број повезан са ширином (његов раст узрокује раст енергије далеко већи од раста квантног броја дужине). Морају се идентификовати првих 12 енергетских нивоа (11 попуњених и 12. у који одлази побуђени електрон приликом првог прелаза). Даље је довољно доказати да је енергетски ниво (1, 2) већи од (12, 1), а јасно је да је (12, 1) већи од (11, 1) до (1, 1). Овако би првих 12 енергетских нивоа били (1, 1); (2, 1); ...; (12, 1). Доказ је следећи: $\frac{1}{2{,}6^2} + \frac{4}{0{,}3^2} = 44{,}6 > 32{,}4 = \frac{144}{2{,}6^2} + \frac{1}{0{,}3^2}$**[5п].**Први прелаз је дакле са (11, 1) на (12, 1)**[1п],** те је $\Delta E = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{12^2}{L_x^2} - \frac{11^2}{L_x^2}\right) = \frac{hc}{\lambda_V}$**[2п],**односно $\lambda_V = \frac{8mcL_x^2}{(12^2-11^2)h} = 961nm$**[1п+1п].**Видимо да се не ради о плавој боји, па се модел да још додатно побољшати.

3. Због принципа минимума енергије гумица заузима облик кружнице, силе површинског напона на сваки елемент гумице су кружно симетрични (признати облик без објашњења)**[3п]**. Посматрајмо елемент кружног облика гумице(мали крижни лук). Са слике видимо да је укупна сила затезања на елемент радијална, ка унутрашњости гумице. Ако силу затезања унутар попречног пресека гумице означимо са F_{el}, тада је$F_r = 2F_{el}\sin\Delta\varphi$ [**4**п], а из површинског напона $F_r = 2\gamma\Delta\varphi R$ [**3**п], где је радијална сила затезања сада изједначена са силом површинског напона на елемент кружнице.После апроксимације десне стране прве једнчине за мале углове($\Delta\varphi \ll 1$)и изједначавања са другом добијамо $F_{el} = \gamma R = \frac{ES}{l_0}\Delta l$, где је $\Delta l = l - l_0$, $R = \frac{l}{2\pi}$ [**3**п].Добијамо$\gamma\frac{l}{2\pi} = \frac{ES}{l_0}(l - l_0)$, после чијег сређивања добијамо $l = \frac{ES}{\frac{ES}{l_0} - \frac{\gamma}{2\pi}}$. Коначно добијамо да је релативно издужење $\eta = \frac{l - l_0}{l_0} = -1 + \frac{ES}{ES - \frac{\gamma l_0}{2\pi}} = 0.00955\%$ [**1**п + **1**п].



4. а) Применимо Гаусов закон на облак налектрисања. Уочимо сферу концентричну са облаком полупречника r; за њу важи да је због симетрије електрично поље нормално на њу, и истог интензитета на свакој тачки, те се Гаусов закон може записати као $E \cdot 4r^2\pi = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi\rho}{\epsilon_0}$**[4п]**. Из овога, и чињенице да је густина наелектрисања дата са $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}R^3\pi}$, за електрично поље имамо $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e}{R^3}r$**[2п]**. За електрон даље важи закон кретања $a = r'' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{mR^3}r$, из ког видимо да је оно хармонијско са угаоном учестаношћу $\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{e^2}{mR^3}}$**[2п].**

б) Изједначавање таласних дужина ова два фотона еквивалентно је изједначавању апсолутне разлике у енергијама у ове 2 ситуације. За јонизацију Боровог водоника потребна јеколичина енергије $\Delta E = \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2}$**[2п]**, а код заустављања електрона у Томсоновом водонику ослободи се $\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2$**[2п]**, што је кинетичка енергија електрона у центру. Изједнањавањем ове две енергије имамо да је брзина кроз центар $v_0 = \frac{e^2}{2h\epsilon_0}$**[2п]**, док је тако постигнута амплитуда осцилација $r_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{e}{2h\epsilon_0}\sqrt{4\pi\epsilon_0 mR^3}$**[2п]**. Изједначавањем полупречника облака са овом амплитудом (r_0=R) и изражавањем преко константи имамо да је полупречник $R = \frac{h^2\epsilon_0}{me^2\pi}$**[2п]**, а ово се поклапа са изразом Боровог полупречника водоника$a_0 = a_n(n = 1) = (\frac{h^2\epsilon_0}{me^2\pi}n^2)_{n=1} = \frac{h^2\epsilon_0}{me^2\pi}$**[2п]** (Боров полупречник се може извести из квантизације момента импулса, признати и формулу без извођења).

5. Разлагањем импулса насталих честица на компоненте дуж x и y осе добијасе по x: $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = p_3$, а по y: $\frac{\sqrt{3}}{2}p_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}p_2$, одакле се закључује да важи $p_1 = p_2 = p_3$, дакле импулси новодобијених честица увек стоје у односу $p_1 : p_2 : p_3 = 1 : 1 : 1$**[5п].** Обележимо импулс новодобијених честица са p. Из закона одржања енергије, уз коришћење односа маса насталих честица добија се $12m_0c^2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} + \sqrt{(2m_0c^2)^2 + (pc)^2} + \sqrt{(3m_0c^2)^2 + (pc)^2}$**[5п]**(где је m_0 означава масу мировања најмање честице настале распадом). Увођењем смене $x = \frac{pc}{m_0c^2}$**[2п]**претходна једначина своди се на $12 = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{9 + x^2}$**[3п]**одакле се, уз коришћење математичке помоћи из задатка, закључује да је $x \approx 3{,}391$**[2п].** Импулс честица након судара је $p = xm_0c$ (*). Како је $p = \frac{m_{0i}v_i}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}}$, за брзине честица добија се$v_i = \frac{p}{\sqrt{m_{0i}^2 - (\frac{p}{c})^2}}$(**)**[3п],** где је $i = 1, 2, 3$.Заменом (*) у (**), узимајући у обзир однос маса насталих честица добијамо $v_1 = c\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $v_2 = c\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ и $v_3 = c\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$**[3п],** одакле је однос брзина насталих честица $v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} : \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} : \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} = 0{,}283 : 0{,}254 : 0{,}221$**[1п+1п].**

*****У алфа категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Решења припремили:Јован Марковић, Амхерст Колеџ; Филип Георгијевски, ПМФ Крагујевац; Далиборка Храњец, ПМФ Крагујевац

Рецензенти: Проф. др Милан С. Ковачевић, ПМФ Крагујевац

Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: Проф. др Имре Гут