50. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ИЗ ФИЗИКЕ
ШКОЛСКА 2011/2012. ГОДИНА

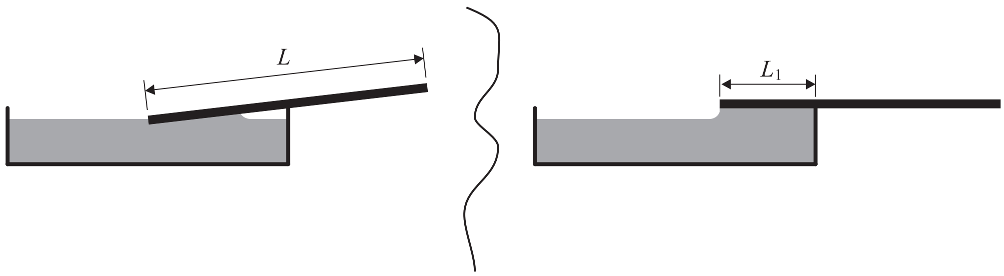
Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ - II група

IV разред

СЕНТА
21.04.2012.

1. Енергија јонизације неког атома представља минималну енергију коју треба довести да би се од атома који је у основном стању одвојио један електрон. Одредити енергију јонизације атома хелијума (редни број $Z = 2$) користећи се Боровом теоријом атома. Сматрати следеће: 1) оба електрона се крећу по истој кружној орбити чији је центар у језгру, 2) електроне посматрати као тачкасте наелектрисане честице чије кретање је описано законима класичне механике при чему је интензитет момента импулса сваког електрона једнак $n\hbar$, где је n позитиван цео број, 3) наелектрисане честице у атому интерагују Кулоновом силом. **(15 поена)**

2. За мерење површинског напона воде искоришћен је једноставан експеримент са слике 1. У експерименту се користи посуда која је напуњена водом скоро до врха, и жица дужине $L = 15\,\mathrm{cm}$ и масе $m = 1\,\mathrm{g}$. У почетном тренутку је жица ослоњена око своје средине на руб посуде. Један крај жице је уроњен у воду тако да површински напон држи жицу у равнотежи (леви део слике 1). Затим жица почиње постепено да се повлачи тако да је све већи њен део ван посуде. У тренутку када је дужина дела над посудом $L_1 = 5{,}4\,\mathrm{cm}$ долази до одвајања жице од воде. У овом тренутку жица је у приближно хоризонталном положају, па самим тим вода кваси цео део жице над водом. На основу ових података одредити коефицијент површинског напона воде. Убрзање Земљине теже је $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. **(15 поена)**



Слика 1: уз задатак 2

3. **(22 поена)** У овом задатку одредићете на примеру силицијума како специфична електрична проводност полупроводничког материјала зависи од температуре. На основу зонске теорије чврстог тела, електрон у материјалу може имати енергију само из дозвољених интервала енергија - зона, које су раздвојене забрањеним интервалима енергија - енергетским процепима. За опис електричних особина материјала од значаја су валентна зона која покрива интервал енергија $(E_\mathrm{V} - W_\mathrm{V}, E_\mathrm{V})$ и проводна зона у интервалу енергија $(E_\mathrm{C}, E_\mathrm{C} + W_\mathrm{C})$, где је $E_\mathrm{C} > E_\mathrm{V}$. Ове две зоне су раздвојене енергетским процепом који се налази у области енергија $(E_\mathrm{V}, E_\mathrm{C})$. У полупроводничком материјалу, на температури апсолутне нуле, сва стања у валентној зони су попуњена електронима, а сва стања у проводној зони су празна. На већим температурама T, неки од електрона из валентне зоне могу да пређу у проводну зону, при чему је вероватноћа да стање енергије E буде попуњено електроном дата Ферми-Дираковом функцијом $f_\mathrm{FD}(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_\mathrm{F}}{k_\mathrm{B}T}}+1}$, где се величина E_F назива Фермијева енергија. При преласку електрона из валентне у проводну зону, у валентној зони остаје непопуњено стање - шупљина.

   а) Израчунати вредност величине $k_\mathrm{B}T$ у електрон-волтима на собној температури $T = 300\,\mathrm{K}$. **(1 поен)**

   б) Густина стања се дефинише као $D(E) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E}$, где је $\mathrm{d}n$ број дозвољених стања у малом интервалу енергија $(E, E + \mathrm{d}E)$ по јединици запремине материјала. Сматрати да је у интервалу енергија $(E_\mathrm{C}, E_\mathrm{C} + W_\mathrm{C})$ (проводна зона) густина стања једнака $D(E) = D_\mathrm{C}$, а у интервалу енергија $(E_\mathrm{V} - W_\mathrm{V}, E_\mathrm{V})$ (валентна зона) је $D(E) = D_\mathrm{V}$.

   б1) Извести математички израз којим се укупна концентрација електрона у проводној зони n_e изражава у функцији E_C, W_C, E_F, T и D_C. **(3 поена)** б2) Извести математички израз којим се укупна концентрација шупљина у валентној зони n_p изражава у функцији E_V, W_V, E_F, T и D_V. **(3 поена)**

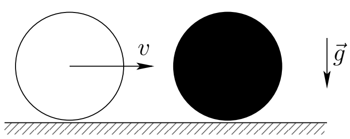
в) Користећи се претходним делом задатка (или на други начин), одредити зависност n_e, n_p и E_F од температуре која није већа од собне. Помоћ: Потребно је искористити апроксимације $e^x \pm 1 = e^x$ и $1 \pm e^{-x} = 1$, које важе за $x \gg 1$. Приликом увођења ових апроксимација треба имати у виду да је решење које ћете добити за E_F у близини енергије $\frac{1}{2}(E_\mathrm{C} + E_\mathrm{V})$. **(8 поена)**

г) Кад су у питању електричне особине материјала, може се сматрати да су електрони носиоци негативног наелектрисања $-e$, а шупљине носиоци позитивног наелектрисања $+e$. Апсолутна вредност покретљивости електрона је μ_e, а шупљина μ_p. Имајући ове чињенице у виду, одредити зависност специфичне електричне проводности силицијума од температуре. **(4 поена)**

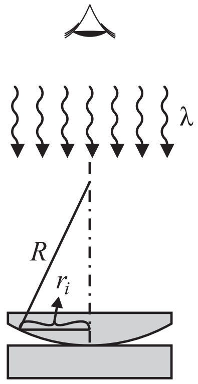
д) Колика је специфична електрична проводност силицијума на $T = 300\,\mathrm{K}$, а колика на $T = 273\,\mathrm{K}$? **(3 поена)**

Бројне вредности које можете користити у свим деловима овог задатка: $W_\mathrm{V} = 7{,}8\,\mathrm{eV}$, $E_\mathrm{V} = 0$, $E_\mathrm{C} = 1{,}1\,\mathrm{eV}$, $W_\mathrm{C} = 3{,}0\,\mathrm{eV}$, $D_\mathrm{C} = 1{,}6 \cdot 10^{27}\,\mathrm{m^{-3}eV^{-1}}$, $D_\mathrm{V} = 6{,}3 \cdot 10^{26}\,\mathrm{m^{-3}eV^{-1}}$, $\mu_e = 0{,}14\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$, $\mu_p = 0{,}045\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$

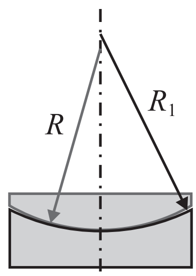
4. Бела билијарска кугла масе m и полупречника R, креће се без проклизавања брзином v по зеленом хоризонталном билијарском столу и налеће на исту такву црну куглу која мирује (слика 2). Судар је чеони, што значи да се правац брзине v поклапа са правцем који спаја центре кугли. Коефицијент трења између кугли и стола је μ, а између кугли нема трења. Цео систем се налази у пољу силе теже чије је убрзање g, а момент инерције кугле у односу на осу која пролази кроз центар кугле је $I = \frac{2}{5}mR^2$. Сматрати да је судар кугли апсолутно еластичан и траје јако кратко, тј. да време t_s током кога су кугле у непосредном додиру испуњава услов $t_s \ll v/(\mu g)$. Нацртати графике зависности брзине и угаоне брзине сваке од кугли од времена након судара. Одредити у општим бројевима све карактеристичне брзине, угаоне брзине и времена која се јављају на графицима. **(23 поена)**



Слика 2: уз задатак 4



Слика 3: уз задатак 5



Слика 4: уз задатак 5

5. **(25 поена) Њутнови прстенови**.

Под појмом „Њутнови прстенови” се подразумевају кружне интерференционе пруге које се јављају када се у близини равне рефлектујуће површине налази сферна рефлектујућа површина. Ову појаву је први приметио Њутн 1717. године када је на равно огледало или равну стаклену плочицу ставио сферно сочиво великог полупречника кривине, слика 3. Интерференција се јавља јер се ваздух (или неки други флуид) између плоче и сочива понаша као оптички клин. Да ли ће на одређеном месту доћи до конструктивне или деструктивне интерференције зависи од дебљине клина, односно растојања између плоче и сочива на том месту.

а) Полупречник i-тог Њутновог прстена дат је формулом $r_i = \sqrt{R\lambda\,(i-1/2)}$ где је R полупречник кривине сферног сочива, а λ је таласна дужина упадне светлости. Извести ову формулу. Овде под Њутновим прстеновима подразумевамо кругове где је максималан интензитет интерференционе слике. При извођењу занемарити преламање на сферној површини. **(3 поена)**

Метод Њутнових прстенова је изузетно погодан за мерење полупречника кривина сочива код којих су ови полупречници велики (реда неколико метара или више), а које је због тога тешко мерити другим методама. У табели 1 су дати измерени полупречници Њутнових прстенова. Као извор светлости је коришћен HeNe ласер таласне дужине 632,8 nm.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i / [mm]	1,8	2,4	3,0	3,5	3,8	4,4	4,7	5,1	5,4	5,7
Δr_i / [mm]	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

Табела 1: Експериментални подаци

б) Извршити линеаризацију формуле добијене под а) тако да је најпогодније одредити полупречник кривине сочива графичком методом. **(3 поена)**

в) На основу табеле и извршене линеаризације нацртати одговарајући график. **(5 поена)**

г) Користећи график одредити полупречник кривине сочива и грешку његовог мерења. При одређивању грешке занемарити грешку таласне дужине ласера јер је њена релативна грешка много мања од релативне грешке мерења полупречника Њутнових прстенова. **(4 поена)**

Поред мерења полупречника кривина сочива метод Њутнових прстенова је погодан и за директно мерење мале разлике полупречника кривина два сочива. На слици 4 је приказан пример код кога је равна плочица замењена план-конкавним сочивом.

д) Извести израз за полупречник i-тог Њутновог прстена за случај са слике 4. И овде под Њутновим прстеновима подразумевамо кругове где је максималан интензитет интерференционе слике. Полупречник кривине план-конкавног сочива је R_1, план-конвексног је R ($R_1 > R$), а таласна дужина упадне светлости је λ. При извођењу сматрати да је разлика полупречника кривина сочива веома мала у поређењу са самим полупречницима кривина. И овде занемарити промену угла при преламању и одбијању од сферних површина. **(3 поена)**

ђ) На интерференционој слици која се јавља у случају датом на слици 4 може да се уочи само један Њутнов прстен полупречника 18 mm. Грешка мерења полупречника је 3 mm. Колика је разлика полупречника кривина два сочива и са којом грешком можемо да је одредимо? План-конвексно сочиво је исто као у првом делу задатка. **(4 поена)**

е) Колики је полупречник план-конкавног сочива R_1 и колика је грешка његовог мерења? **(3 поена)**

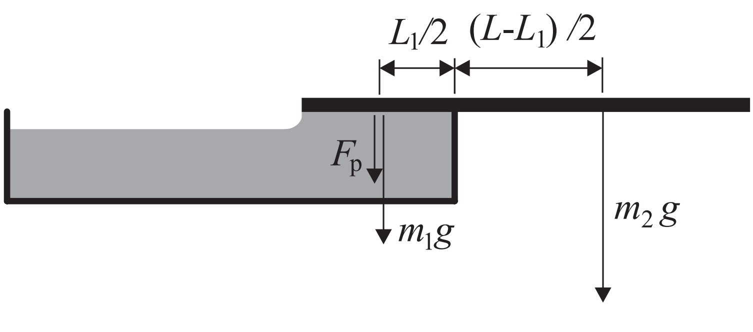
Потребне константе: $1\ \mathrm{Ry} = \frac{1}{2}\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = 13{,}6\ \mathrm{eV}$, где је маса мировања електрона $m_0 = 9{,}109\cdot 10^{-31}$ kg, редукована Планкова константа $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C, диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$. Болцманова константа $k_\mathrm{B} = 8{,}62\cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{K}}$.
Потребни интеграл: $\int_a^b e^{kx}\mathrm{d}x = \frac{e^{kb}-e^{ka}}{k}$, за $k \neq 0$.
Подсетник (уколико је потребан): Покретљивост носилаца μ је коефицијент који повезује средњу брзину усмереног кретања $\vec{v}$ и електрично поље $\vec{E}$ и дефинисана је са $\vec{v} = \mu\vec{E}$. Специфична проводност материјала σ је коефицијент који повезује густину струје $\vec{j}$ и електрично поље $\vec{E}$ и дефинисана је са $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Желимо вам успешан рад и пријатан боравак у Сенти!

Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* и *др Михаило Рабасовић*, Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Дарко Танасковић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд

1. Енергија јонизације атома хелијума E_j је једнака разлици енергије основног стања He^+ јона E_+ и енергије основног стања атома хелијума E $\boxed{\mathbf{2п}}$. Да би се електрони кретали по истој кружној орбити полупречника r, они се морају кретати истим угаоним брзинама ω и морају се у сваком тренутку налазити у дијаметрално супротним тачкама орбите. Тада из услова квантовања момента импулса следи да је у основном стању $m_0r^2\omega = \hbar$ $(n=1)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Из Другог Њутновог закона за кретања електрона следи $m_0r\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(2r)^2}$, где први члан потиче од привлачне силе интеракције језгра и електрона, а други од одбојне силе између два електрона $\boxed{\mathbf{2п}}$. Енергија основног стања је тад $E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2e^2}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r} + 2\frac{1}{2}m_0r^2\omega^2$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, где први члан представља потенцијалну енергију интеракција електрона са језгром, други члан је потенцијална енергија интеракције између електрона, а трећи је кинетичка енергија електрона. Из ових једначина се добија $E = -\frac{49}{16}\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. С друге стране, за He^+ јон важе следеће једначине: $m_0r_1^2\omega_1 = \hbar$, $m_0r_1\omega_1^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{r_1^2}$ и $E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2e^2}{r_1} + \frac{1}{2}m_0r_1^2\omega_1^2$, из којих се добија $E_+ = -2\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$ $\boxed{\mathbf{3п}}$. Одатле је енергија јонизације $E_\mathrm{j} = E_+ - E = \frac{17}{16}\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{17}{8}\,\mathrm{Ry} = 28{,}9\,\mathrm{eV}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

2. Непосредно пре тренутка одвајања постоји равнотежа момената сила који делују на жицу, слика 1. На део жице који се налази изнад посуде делују две силе, односно два момента силе: момент силе услед тежине дела жице који се налази изнад воде и момент услед силе површинског напона. На део који се не налази изнад воде делује само момент услед тежине тог дела. Пошто су све поменуте силе равномерно распоређене дуж жице онда је њихов момент исти као да оне делују на средине одговарајућих делова (видети слику 1). Према томе, услов равнотеже момената може да се напише као $F_p\frac{L_1}{2} + m_1g\frac{L_1}{2} = m_2g\frac{L-L_1}{2}$ $\boxed{\mathbf{5п}}$, где је $m_1 = m\frac{L_1}{L}$, $m_2 = m\frac{L-L_1}{L}$, $F_p = 2\gamma L_1$ $\boxed{\mathbf{5п}}$, где је γ тражени коефицијент површинског напона. У последњој једначини фигурише фактор 2 јер на обе ивице жице делује сила површинског напона. Заменом последње три једначине у једначину која описује равнотежу момената добијамо да коефицијент површинског напона може да се изрази као $\gamma = \frac{mg}{2L}\left[\left(\frac{L}{L_1}-1\right)^2 - 1\right]$ $\boxed{\mathbf{3п}}$. Одавде добијамо да коефицијент површинског напона воде износи $\gamma = 0{,}071\,\mathrm{N/m}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.



Слика 1: уз решење задатка 2

3. а) Заменом бројних вредности се добија $k_\mathrm{B}T = 0{,}0259\,\mathrm{eV}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$.
б1) Број дозвољених стања у јединици запремине у интервалу енергија $(E, E+\mathrm{d}E)$ је $D_\mathrm{C}(E)\mathrm{d}E$. Пошто је вероватноћа да такво стање буде попуњено електроном једнака $f_\mathrm{FD}(E) = \frac{1}{\exp\frac{E-E_\mathrm{F}}{k_\mathrm{B}T}+1}$, следи да је концентрација електрона са енергијама из овог интервала $\mathrm{d}n_e = f_\mathrm{FD}(E)D_\mathrm{C}(E)\mathrm{d}E$. Укупна концентрација електрона у проводној зони добија се интеграљењем последњег израза по интервалу енергија проводне зоне $n_e = \int_{E_\mathrm{C}}^{E_\mathrm{C}+W_\mathrm{C}}\frac{1}{\exp\frac{E-E_\mathrm{F}}{k_\mathrm{B}T}+1}D_\mathrm{C}(E)\mathrm{d}E$ $\boxed{\mathbf{3п}}$.

б2) Вероватноћа да стање енергије E из валентне зоне буде празно је $1 - f_{\mathrm{FD}}(E)$. Сада се слично као у претходном делу задатка добија да је $n_p = \int_{E_{\mathrm{V}}-W_{\mathrm{V}}}^{E_{\mathrm{V}}} \left(1 - \frac{1}{\exp\frac{E-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}+1}\right) D_{\mathrm{V}}(E)\mathrm{d}E$, што се еквивалентно може записати и као $n_p = \int_{E_{\mathrm{V}}-W_{\mathrm{V}}}^{E_{\mathrm{V}}} \frac{1}{\exp\frac{E_{\mathrm{F}}-E}{k_{\mathrm{B}}T}+1} D_{\mathrm{V}}(E)\mathrm{d}E$ $\boxed{\mathbf{3п}}$.

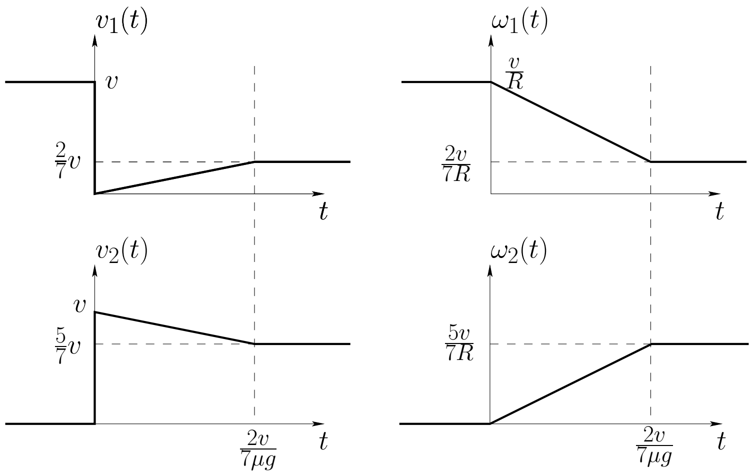
в) Полазећи од решења дела б1, занемаривањем члана 1 у имениоцу (што је дозвољено јер за енергије E из проводне зоне важи $\frac{E-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T} \gg 1$) следи $n_e = D_{\mathrm{C}} \int_{E_{\mathrm{C}}}^{E_{\mathrm{C}}+W_{\mathrm{C}}} \exp\left(-\frac{E-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\mathrm{d}E$. Решавањем интеграла следи $n_e = D_{\mathrm{C}} k_{\mathrm{B}} T \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{W_{\mathrm{C}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right]$. Пошто је $\frac{W_{\mathrm{C}}}{k_{\mathrm{B}}T} \gg 1$, последњи израз се може апроксимирати са $n_e = D_{\mathrm{C}} k_{\mathrm{B}} T \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$. Сличним поступком се добија да је $n_p = D_{\mathrm{V}} k_{\mathrm{B}} T \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{F}}-E_{\mathrm{V}}}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$. Пошто електрони у проводној зони настају тако што електрон из валентне зоне пређе у проводну и за собом остави шупљину, следи да је $n_e = n_p$. Користећи ову једнакост и претходно добијене изразе за n_e и n_p добија се да је $n_e(T) = n_p(T) = k_{\mathrm{B}} T \sqrt{D_{\mathrm{C}} D_{\mathrm{V}}} \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{V}}}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)$ и $E_{\mathrm{F}} = \frac{1}{2}\left(E_{\mathrm{C}} + E_{\mathrm{V}}\right) + \frac{1}{2} k_{\mathrm{B}} T \ln\frac{D_{\mathrm{V}}}{D_{\mathrm{C}}}$ $\boxed{\mathbf{8п}}$.

г) Специфична проводност је збир доприноса специфичних проводности од електрона и од шупљина $\sigma = \mu_e n_e e + \mu_p n_p e = e(\mu_e + \mu_p) k_{\mathrm{B}} T \sqrt{D_{\mathrm{C}} D_{\mathrm{V}}} \exp\left(-\frac{E_{\mathrm{C}}-E_{\mathrm{V}}}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)$ $\boxed{\mathbf{4п}}$.

д) Заменом бројних вредности следи да је специфична проводност на $T = 300\,\mathrm{K}$ једнака $\sigma = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, а на $T = 273\,\mathrm{K}$ је $\sigma = 4{,}9 \cdot 10^{-5}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ $\boxed{\mathbf{3п}}$.

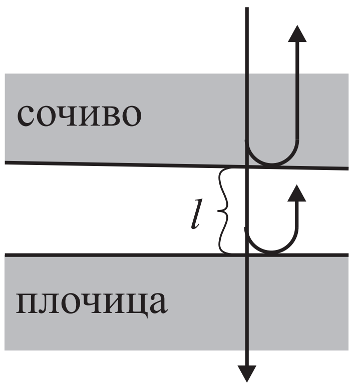
4. Брзина беле кугле пре судара је по услову задатка v, а пошто кугла не проклизава њена угаона брзина је $\omega = \frac{v}{R}$. Максимални импулс који кугла може примити током судара услед дејства силе трења је $p_s = \mu m g t_s$, а с обзиром на услов задатка $t_s \ll v/(\mu g)$ одакле је $p_s \ll mv$, следи да се промена импулса кугли услед дејства силе трења током судара може занемарити. На сличан начин се може закључити и да су промене момента импулса и кинетичке енергије услед дејства силе трења током самог судара занемарљиве. Из закона одржања импулса примењеног за тренутак пре и после судара следи да је $mv = mv_1 + mv_2$, где су v_1 и v_2 брзине беле и црне кугле непосредно након судара. С обзиром да је промена момента импулса услед дејства силе трења са подлогом током судара занемарљива и да нема трења између кугли, следи да се током судара угаоне брзине кугли не промене. Из закона одржања енергије примењеног за тренутак пре и после судара је тад $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$. Из последње две једначине следи $v_1 = 0$ и $v_2 = v$. Одатле следи да бела кугла након судара има брзину транслације $v_1 = 0$ и брзину ротације $\omega_1 = \frac{v}{R}$, а црна кугла брзину транслације $v_2 = v$ и ротације $\omega_2 = 0$ $\boxed{\mathbf{7п}}$, тако да обе кугле непосредно након судара проклизавају по подлози. Зато на сваку од њих делује сила трења клизања чији је интензитет једнак $F = \mu m g$. Из другог Њутновог закона за транслацију и ротацију беле кугле следи $ma_1 = \mu m g$ и $I\alpha_1 = -\mu m g R$, а за црну куглу је $ma_2 = -\mu m g$ и $I\alpha_2 = \mu m g R$. Одатле су зависности брзина и угаоних брзина кугли од времена дате са $v_1(t) = \mu g t$, $\omega_1(t) = \frac{v}{R} - \frac{5\mu g}{2R}t$, $v_2(t) = v - \mu g t$ и $\omega_2(t) = \frac{5\mu g}{2R}t$ $\boxed{\mathbf{5п}}$. Ова зависност важи до тренутка кад кугла престане да проклизава. За прву куглу то ће се десити у тренутку t_1 који задовољава $v_1(t_1) = R\omega_1(t_1)$, а за другу куглу у тренутку t_2 који се добија из услова $v_2(t_2) = R\omega_2(t_2)$. Из ових једначина се добија да је $t_1 = \frac{2v}{7\mu g}$, $v_1(t_1) = \frac{2}{7}v$, $\omega_1(t_1) = \frac{2v}{7R}$, $t_2 = \frac{2v}{7\mu g}$, $v_2(t_2) = \frac{5}{7}v$, $\omega_2(t_2) = \frac{5v}{7R}$ $\boxed{\mathbf{5п}}$. Након овог тренутка $t_1 = t_2$ кугле се крећу без проклизавања константном брзином и константном угаоном брзином $\boxed{\mathbf{2п}}$. Тражени графици добијени на основу свега реченог су приказани на слици 2 $\boxed{\mathbf{4п}}$.

5. а) Њутнов прстен, односно максималан интензитет интерференционе слике ће се јавити када су таласи који се одбију од сферне површине сочива и површине плочице у фази, слика 3. Пошто при рефлексији од плочице долази до промене фазе за π, ова два таласа ће бити у фази када је путна разлика $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$,… односно када је $2l = \lambda/2,\ 3\lambda/2,\ 5\lambda/2, \ldots$, тј. $l = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, где је $i = 1, 2, 3, \ldots$ С друге стране, са слике 4 може да се види да растојање између плочице и сочива

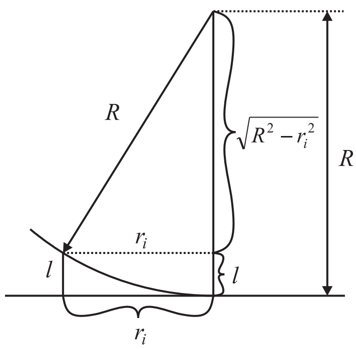


Слика 2: уз решење задатка 4

l може да се напише као $l = R - \sqrt{R^2 - r_i^2}$, одакле је $r_i^2 = 2Rl - l^2$, односно $r_i = \sqrt{2Rl}$, при чему смо искористили чињеницу да је $l \ll R$. Комбиновањем претходних једначина добијамо да је полупречник i-тог Њутновог прстена дат са $r_i = \sqrt{R\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)}$.



Слика 3: уз решење задатка 5



Слика 4: уз решење задатка 5

б) Пошто су у табели дати редни бројеви Њутнових прстенова и њихови полупречници, потребно је претходну једначину линеаризовати тако да се јавља линеарна зависност r_i од i. За ово је довољно квадрирати претходну једначину. На овај начин добијамо $r_i^2 = R\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)$. Одавде се види да зависност r_i^2 од $i - 1/2$ представља праву линију која пролази кроз координатни почетак. Коефицијент правца ове праве зависи од полупречника кривине сочива.

в) Сада табелу можемо да напишемо у нешто другачијој форми (табела 1).

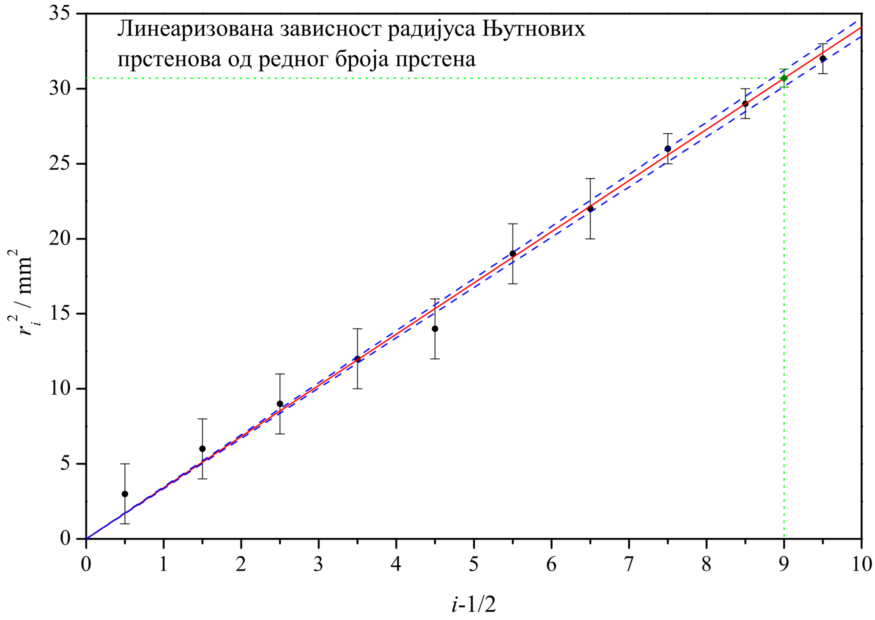
Грешку за квадрат полупречника можемо да нађемо тако што квадрирање посматрамо као множење два иста броја. Одавде закључујемо да је релативна грешка квадрата неке вредности два пута већа од релативне грешке те вредности, односно $\frac{\Delta\left(r_i^2\right)}{r_i^2} = 2\frac{\Delta r_i}{r_i}$, одакле је $\Delta\left(r_i^2\right) = 2r_i\Delta r_i$.

Сада на основу ове табеле можемо да нацртамо график, који је приказан на слици 5.

г) Да бисмо са графика одредили полупречник кривине сочива потребно је да експерименталне тачке фитујемо правом која пролази кроз координатни почетак (што је приказано на графику

$i-1/2$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
r_i^2 / [mm^2]	3 (3,24)	6 (5,76)	9 (9,00)	12 (12,25)	14 (14,44)	19 (19,36)	22 (22,09)	26 (26,01)	29 (29,16)	32 (32,49)
Δr_i^2 / [mm^2]	2 (1,80)	2 (1,92)	2 (1,80)	2 (2,1)	2 (1,52)	2 (1,76)	2 (1,88)	1 (1,02)	1 (1,08)	1 (1,14)

Табела 1: Зависност r_i^2 од $i-1/2$

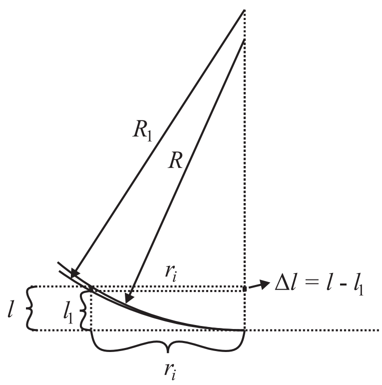


Слика 5: уз решење задатка 5

пуном линијом). Из коефицијента правца ове праве можемо да одредимо полупречник кривине сочива. За одређивање коефицијента правца нам је довољна само једна тачка јер права пролази кроз координатни почетак. На графику је за ово одабрана тачка чија је апсциса 9. Са графика је очитана вредност за ординату 30,7 mm^2. Одавде добијамо да је коефицијент правца нашег линеарног фита $k = \frac{30{,}7\,\mathrm{mm}^2}{9} = 3{,}411\,\mathrm{mm}^2$. Да бисмо одредили грешку за коефицијент правца кроз експерименталне тачке повуцимо две најекстремније праве које крећу из координатног почетка и које обухватају све експерименталне тачке у оквиру експерименталних грешака. Ове праве су приказане на графику испрекиданим линијама. На основу ове две праве и тачке коју смо користили за одређивање k можемо да видимо да је грешка за r_i^2 за ову тачку $\Delta r_i^2 = 0{,}6\mathrm{mm}^2$. Сада можемо да пишемо $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta r_i^2}{r_i^2}$, одакле је $\Delta k = k\frac{\Delta r_i^2}{r_i^2} = 0{,}0666\mathrm{mm}^2 \approx 0{,}07\mathrm{mm}^2$. Сада на основу задатка под б) можемо да закључимо $R = \frac{k}{\lambda} = 5{,}390$ m. Релативна грешка полупречника кривине сочива је једнака релативној грешци коефицијента правца па добијамо $\Delta R = R\frac{\Delta k}{k} = R\frac{\Delta r_i^2}{r_i^2} = 5{,}390\,\mathrm{m}\frac{0{,}6\,\mathrm{mm}^2}{30{,}7\,\mathrm{mm}^2} = 0{,}105\ \mathrm{m} \approx 0{,}1\ \mathrm{m}$. Сада можемо да пишемо да је $R = 5{,}4(1)$ m.

д) На слици 6 дат је случај два сочива мале разлике полупречника кривина. Услов за формирање максимума практично је исти као и раније, односно $\Delta l = l - l_1 = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$. Величине l и l_1 такође могу да се израчунају као и раније, односно имамо да је $l \approx \frac{r_i^2}{2R}$ и $l_1 \approx \frac{r_i^2}{2R_1}$. Из претходне три једначине добијамо $\frac{r_i^2}{2R} - \frac{r_i^2}{2R_1} = \Delta l = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $\frac{r_i^2}{2}\frac{R_1 - R}{R_1 R} = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $r_i^2 \frac{\Delta_{R_1 R}}{R^2} = \lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $r_i = \sqrt{\frac{R^2}{\Delta_{R_1 R}}\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)}$. Притом је узето да је $R_1 R \approx R^2$ јер се полупречници веома мало разликују. Са $\Delta_{R_1 R}$ је означена разлика полупречника кривина два сочива.

ђ) Добијена формула може да се напише у нешто другачијем облику $\Delta_{R_1 R} = \frac{R^2}{r_i^2}\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)$. Из ове формуле може директно да се добије разлика полупречника ако је познат један од њих. За дати пример добијамо $\Delta_{R_1 R} = \frac{5{,}4^2\ \mathrm{m}^2}{0{,}018^2\ \mathrm{m}^2} 632{,}8 \cdot 10^{-9}\mathrm{m}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}0285\mathrm{m}$. Релативну грешку разлике можемо да напишемо као $\frac{\Delta\left(\Delta_{R_1 R}\right)}{\Delta_{R_1 R}} = 2\left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta r_i}{r_i}\right)$ одакле добијамо $\Delta\left(\Delta_{R_1 R}\right) \approx 0{,}01$ m. Сада можемо да пишемо $\Delta_{R_1 R} = 0{,}03(1)$ m.

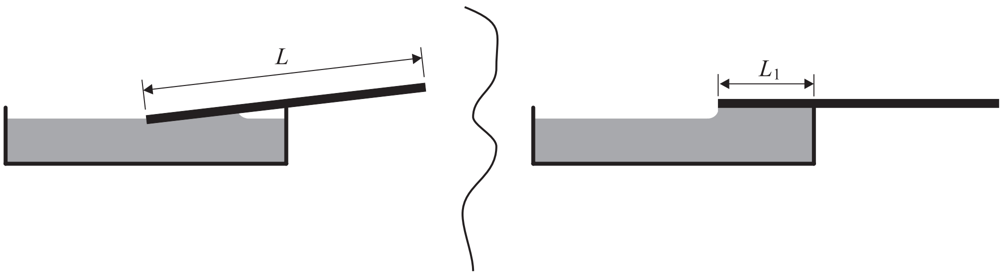


Слика 6: уз решење задатка 5

е) Пошто је $\Delta_{R_1 R} = R_1 - R$ онда је $R_1 = R + \Delta_{R_1 R} = 5{,}4\ \mathrm{m} + 0{,}03\ \mathrm{m} = 5{,}43\ \mathrm{m}$. Грешка мерења R_1 је $\Delta R_1 = \Delta R + \Delta\left(\Delta_{R_1 R}\right) = 0{,}1\ \mathrm{m} + 0{,}01\ \mathrm{m} \approx 0{,}1\ \mathrm{m}$. Сада можемо да пишемо $R_1 = 5{,}4(1)$ m. Треба приметити да је ово иста вредност као за R. Наиме, као што је речено у тексту задатка и као што може да се види из задатка под д), полупречник Њутнових прстенова у овом случају директно мери разлику полупречника кривина. Захваљујући овоме, овом методом можемо да измеримо и разлике полупречника кривина које не можемо да одредимо директним мерењем полупречника и тражењем њихове разлике.

1. Енергија јонизације неког атома представља минималну енергију коју треба довести да би се од атома који је у основном стању одвојио један електрон. Одредити енергију јонизације атома хелијума (редни број $Z = 2$) користећи се Боровом теоријом атома. Сматрати следеће: 1) оба електрона се крећу по истој кружној орбити чији је центар у језгру, 2) електроне посматрати као тачкасте наелектрисане честице чије кретање је описано законима класичне механике при чему је интензитет момента импулса сваког електрона једнак $n\hbar$, где је n позитиван цео број, 3) наелектрисане честице у атому интерагују Кулоновом силом. **(20 поена)**

2. За мерење површинског напона воде искоришћен је једноставан експеримент са слике 1. У експерименту се користи посуда која је напуњена водом скоро до врха, и жица дужине $L = 15\,\mathrm{cm}$ и масе $m = 1\,\mathrm{g}$. У почетном тренутку је жица ослоњена око своје средине на руб посуде. Један крај жице је уроњен у воду тако да површински напон држи жицу у равнотежи (леви део слике 1). Затим жица почиње постепено да се повлачи тако да је све већи њен део ван посуде. У тренутку када је дужина дела над посудом $L_1 = 5{,}4\,\mathrm{cm}$ долази до одвајања жице од воде. У овом тренутку жица је у приближно хоризонталном положају, па самим тим вода кваси цео део жице над водом. На основу ових података одредити коефицијент површинског напона воде. Убрзање Земљине теже је $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. **(15 поена)**



Слика 1: уз задатак 2

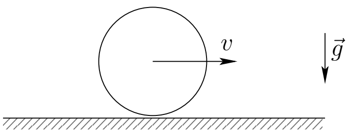
3. **(20 поена)** У овом задатку одредићете на примеру силицијума како специфична електрична проводност полупроводничког материјала зависи од температуре и видети како се овај ефекат може искористити за мерење температуре. На основу зонске теорије чврстог тела, електрон у материјалу може имати енергије само из дозвољених интервала енергија - зона, које су раздвојене забрањеним интервалима енергија - енергетским процепима. За опис електричних особина материјала од значаја су валентна зона и проводна зона. У полупроводничком материјалу, на температури апсолутне нуле, сва стања у валентној зони су попуњена електронима, а сва стања у проводној зони су празна. На већим температурама T, неки од електрона из валентне зоне могу да пређу у проводну зону и тада у валентној зони остаје непопуњено стање - шупљина. Кад су у питању електричне особине материјала, може се сматрати да су електрони носиоци негативног наелектрисања $-e$, а шупљине носиоци позитивног наелектрисања $+e$. Концентрације електрона n_e и шупљина n_p на температури T су једнаке и дате су приближним изразом $n_e(T) = n_p(T) = A\exp\left(-\frac{E_\mathrm{g}}{2k_\mathrm{B}T}\right)$, где је за силицијум $A = 2{,}6\cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$, а енергетски процеп силицијума је $E_\mathrm{g} = 1{,}1\,\mathrm{eV}$.

   а) Одредити зависност специфичне електричне проводности силицијума од температуре. Апсолутна вредност покретљивости електрона у силицијуму је $\mu_e = 0{,}14\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$, а шупљина $\mu_p = 0{,}045\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{Vs}}$. **(7 поена)**

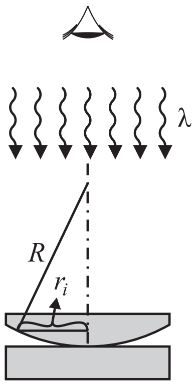
   б) Колика је специфична електрична проводност силицијума на $T = 300\,\mathrm{K}$, а колика на $T = 273\,\mathrm{K}$? **(3 поена)**

   в) Од комада силицијума дужине $l = 20\,\mathrm{cm}$ и попречног пресека $S = 10\,\mathrm{cm^2}$ направљен је силицијумски отпорник који служи као сензор температуре. Силицијумски отпорник је везан на ред са отпорником отпорности $R = 576\,\mathrm{k\Omega}$ и редна веза ова два отпорника је прикључена на батерију напона $U = 12\,\mathrm{V}$. Мерењем напона U_R на отпорнику R можете се одредити температура. Колика је температура ако је $U_\mathrm{R} = 6\,\mathrm{V}$? Занемарити промену отпорности R са температуром. **(10 поена)**

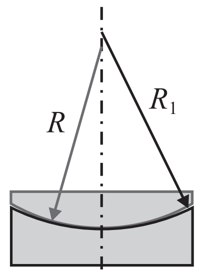
4. Бела билијарска кугла масе m и полупречника R ударена је билијарским штапом тако да јој је саопштена брзина транслације v (слика 2). Удар штапа је централан тако да је угаона брзина кугле непосредно након удара штапа једнака нули. Кугла се налази на зеленом хоризонталном билијарском столу, при чему је коефицијент трења између кугле и стола μ. Цео систем се налази у пољу силе теже чије је убрзање g, а момент инерције кугле у односу на осу која пролази кроз центар кугле је $I = \frac{2}{5}mR^2$. Нацртати графике зависности брзине и угаоне брзине кугле од времена. Одредити у општим бројевима све карактеристичне брзине, угаоне брзине и времена која се јављају на графицима. **(20 поена)**



Слика 2: уз задатак 4



Слика 3: уз задатак 5



Слика 4: уз задатак 5

5. **(25 поена) Њутнови прстенови**.

Под појмом „Њутнови прстенови” се подразумевају кружне интерференционе пруге које се јављају када се у близини равне рефлектујуће површине налази сферна рефлектујућа површина. Ову појаву је први приметио Њутн 1717. године када је на равно огледало или равну стаклену плочицу ставио сферно сочиво великог полупречника кривине, слика 3. Интерференција се јавља јер се ваздух (или неки други флуид) између плоче и сочива понаша као оптички клин. Да ли ће на одређеном месту доћи до конструктивне или деструктивне интерференције зависи од дебљине клина, односно растојања између плоче и сочива на том месту.

а) Полупречник i-тог Њутновог прстена дат је формулом $r_i = \sqrt{R\lambda\,(i - 1/2)}$ где је R полупречник кривине сферног сочива, а λ је таласна дужина упадне светлости. Извести ову формулу. Овде под Њутновим прстеновима подразумевамо кругове где је максималан интензитет интерференционе слике. При извођењу занемарити преламање на сферној површини. **(3 поена)**

Метод Њутнових прстенова је изузетно погодан за мерење полупречника кривина сочива код којих су ови полупречници велики (реда неколико метара или више), а које је због тога тешко мерити другим методама. У табели 1 су дати измерени полупречници Њутнових прстенова. Као извор светлости је коришћен HeNe ласер таласне дужине 632,8 nm.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r_i / [mm]	1,8	2,4	3,0	3,5	3,8	4,4	4,7	5,1	5,4	5,7
Δr_i / [mm]	0,5	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1

Табела 1: Експериментални подаци

б) Извршити линеаризацију формуле добијене под а) тако да је најпогодније одредити полупречник кривине сочива графичком методом. **(3 поена)**

в) На основу табеле и извршене линеаризације нацртати одговарајући график. **(5 поена)**

г) Користећи график одредити полупречник кривине сочива и грешку његовог мерења. При одређивању грешке занемарити грешку таласне дужине ласера јер је њена релативна грешка много мања од релативне грешке мерења полупречника Њутнових прстенова. **(4 поена)**

Поред мерења полупречника кривина сочива метод Њутнових прстенова је погодан и за директно мерење мале разлике полупречника кривина два сочива. На слици 4 је приказан пример код кога је равна плочица замењена план-конкавним сочивом.

д) Извести израз за полупречник i-тог Њутновог прстена за случај са слике 4. И овде под Њутновим прстеновима подразумевамо кругове где је максималан интензитет интерференционе слике. Полупречник кривине план-конкавног сочива је R_1, план-конвексног је R ($R_1 > R$), а таласна дужина упадне светлости је λ. При извођењу сматрати да је разлика полупречника кривина сочива веома мала у поређењу са самим полупречницима кривина. И овде занемарити промену угла при преламању и одбијању од сферних површина. **(3 поена)**

ђ) На интерференционој слици која се јавља у случају датом на слици 4 може да се уочи само један Њутнов прстен полупречника 18 mm. Грешка мерења полупречника је 3 mm. Колика је разлика полупречника кривина два сочива и са којом грешком можемо да је одредимо? План-конвексно сочиво је исто као у првом делу задатка. **(4 поена)**

е) Колики је полупречник план-конкавног сочива R_1 и колика је грешка његовог мерења? **(3 поена)**

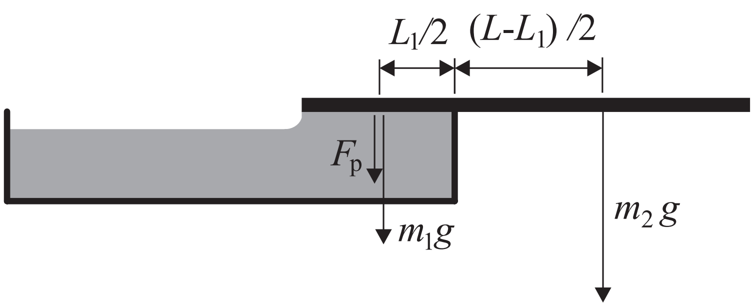
Потребне константе: $1\ \mathrm{Ry} = \frac{1}{2}\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = 13{,}6\ \mathrm{eV}$, где је маса мировања електрона $m_0 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$, редукована Планкова константа $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}054 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$, елементарно наелектрисање $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, диелектрична пропустљивост вакуума $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$. Болцманова константа $k_\mathrm{B} = 8{,}62 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{K}}$.
Подсетник (уколико је потребан): Покретљивост носилаца μ је коефицијент који повезује средњу брзину усмереног кретања $\vec{v}$ и електрично поље $\vec{E}$ и дефинисана је са $\vec{v} = \mu\vec{E}$. Специфична проводност материјала σ је коефицијент који повезује густину струје $\vec{j}$ и електрично поље $\vec{E}$ и дефинисана је са $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Желимо вам успешан рад и пријатан боравак у Сенти!

Задатке припремили: *др Ненад Вукмировић* и *др Михаило Рабасовић*, Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Дарко Танасковић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: *др Александар Крмпот*, Институт за физику, Београд

1. Енергија јонизације атома хелијума $E_{\rm j}$ је једнака разлици енергије основног стања He^+ јона E_+ и енергије основног стања атома хелијума E $\boxed{\textbf{2п}}$. Да би се електрони кретали по истој кружној орбити полупречника r, они се морају кретати истим угаоним брзинама ω и морају се у сваком тренутку налазити у дијаметрално супротним тачкама орбите. Тада из услова квантовања момента импулса следи да је у основном стању $m_0 r^2\omega = \hbar$ $(n=1)$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Из Другог Њутновог закона за кретања електрона следи $m_0 r\omega^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{r^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{(2r)^2}$, где први члан потиче од привлачне силе интеракције језгра и електрона, а други од одбојне силе између два електрона $\boxed{\textbf{3п}}$. Енергија основног стања је тад $E = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2e^2}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r} + 2\frac{1}{2}m_0 r^2\omega^2$ $\boxed{\textbf{3п}}$, где први члан представља потенцијалну енергију интеракција електрона са језгром, други члан је потенцијална енергија интеракције између електрона, а трећи је кинетичка енергија електрона. Из ових једначина се добија $E = -\frac{49}{16}\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$ $\boxed{\textbf{3п}}$. С друге стране, за He^+ јон важе следеће једначине: $m_0 r_1^2\omega_1 = \hbar$, $m_0 r_1\omega_1^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{r_1^2}$ и $E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2e^2}{r_1} + \frac{1}{2}m_0 r_1^2\omega_1^2$, из којих се добија $E_+ = -2\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Одатле је енергија јонизације $E_{\rm j} = E_+ - E = \frac{17}{16}\frac{m_0}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{17}{8}\,\mathrm{Ry} = 28{,}9\,\mathrm{eV}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

2. Непосредно пре тренутка одвајања постоји равнотежа момената сила који делују на жицу, слика 1. На део жице који се налази изнад посуде делују две силе, односно два момента силе: момент силе услед тежине дела жице који се налази изнад воде и момент услед силе површинског напона. На део који се не налази изнад воде делује само момент услед тежине тог дела. Пошто су све поменуте силе равномерно распоређене дуж жице онда је њихов момент исти као да оне делују на средине одговарајућих делова (видети слику 1). Према томе, услов равнотеже момената може да се напише као $F_p\frac{L_1}{2} + m_1 g\frac{L_1}{2} = m_2 g\frac{L-L_1}{2}$ $\boxed{\textbf{5п}}$, где је $m_1 = m\frac{L_1}{L}$, $m_2 = m\frac{L-L_1}{L}$, $F_p = 2\gamma L_1$ $\boxed{\textbf{5п}}$, где је γ тражени коефицијент површинског напона. У последњој једначини фигурише фактор 2 јер на обе ивице жице делује сила површинског напона. Заменом последње три једначине у једначину која описује равнотежу момената добијамо да коефицијент површинског напона може да се изрази као $\gamma = \frac{mg}{2L}\left[\left(\frac{L}{L_1}-1\right)^2 - 1\right]$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Одавде добијамо да коефицијент површинског напона воде износи $\gamma = 0{,}071\,\mathrm{N/m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

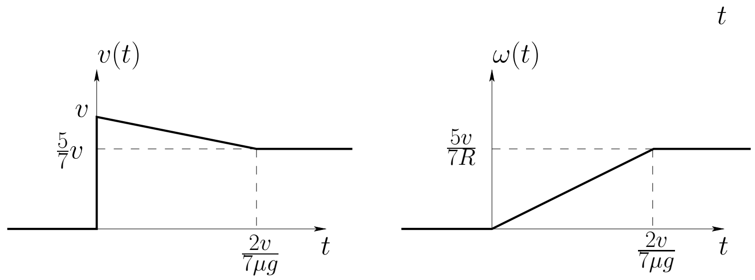


Слика 1: уз решење задатка 2

3. а) Специфична проводност је збир доприноса специфичних проводности од електрона и од шупљина $\sigma = \mu_e n_e e + \mu_p n_p e = e(\mu_e + \mu_p)A\exp\left(-\frac{E_{\rm g}}{2k_{\rm B}T}\right)$ $\boxed{\textbf{7п}}$.
б) Заменом бројних вредности следи да је специфична проводност на $T = 300\,\mathrm{K}$ једнака $\sigma = 4{,}5\cdot10^{-4}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, а на $T = 273\,\mathrm{K}$ је $\sigma = 5{,}4\cdot10^{-5}\,\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ $\boxed{\textbf{3п}}$.
в) Отпорност силицијумског отпорника је $R_{\rm S} = \frac{1}{\sigma(T)}\frac{l}{S}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Кроз коло тече струја $I = \frac{U}{R+R_{\rm S}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, па је напон на отпорнику R једнак $U_{\rm R} = IR$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Из претходних једначина следи $T =$

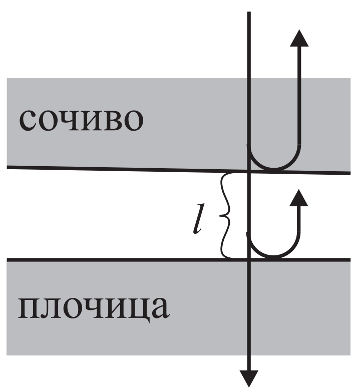
$\frac{E_{\rm g}}{2k_{\rm B}}\frac{1}{\ln\left[\frac{R(U-U_{\rm R})SeA(\mu_e+\mu_p)}{U_{\rm R}l}\right]} = 296{,}5\,\mathrm{K}$ $\boxed{\textbf{4п}}$.

4. Пошто кугла у почетку проклизава, на њу делује сила трења клизања чији је интензитет једнак $F = \mu mg$, а усмерена је тако да успорава куглу. Из другог Њутновог закона за транслацију и ротацију беле кугле следи $ma = -\mu mg$ и $I\alpha = \mu mgR$. Одатле је зависност брзине и угаоне брзине кугле од времена дата са $v(t) = v - \mu gt$ и $\omega(t) = \frac{5\mu g}{2R}t$ $\boxed{\textbf{6п}}$. Ова зависност важи до тренутка кад кугла престане да проклизава. То ће се десити у тренутку t_1 који задовољава $v(t_1) = R\omega(t_1)$, одакле је $t_1 = \frac{2v}{7\mu g}$, $v(t_1) = \frac{5}{7}v$, $\omega(t_1) = \frac{5v}{7R}$ $\boxed{\textbf{6п}}$. Након овог тренутка t_1 кугла се креће без проклизавања константном брзином и константном угаоном брзином $\boxed{\textbf{3п}}$. Тражени графици добијени на основу свега реченог су приказани на слици 2 $\boxed{\textbf{5п}}$.

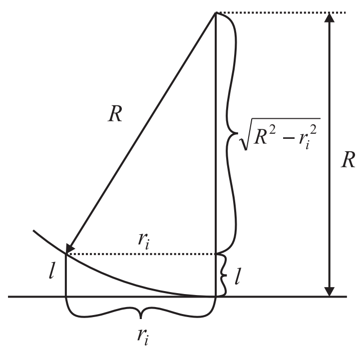


Слика 2: уз решење задатка 4

5. а) Њутнов прстен, односно максималан интензитет интерференционе слике ће се јавити када су таласи који се одбију од сферне површине сочива и површине плочице у фази, слика 3. Пошто при рефлексији од плочице долази до промене фазе за π, ова два таласа ће бити у фази када је путна разлика $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$,... односно када је $2l = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$, тј. $l = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, где је $i = 1, 2, 3, \ldots$ С друге стране, са слике 4 може да се види да растојање између плочице и сочива l може да се напише као $l = R - \sqrt{R^2 - r_i^2}$, одакле је $r_i^2 = 2Rl - l^2$, односно $r_i = \sqrt{2Rl}$, при чему смо искористили чињеницу да је $l \ll R$. Комбиновањем претходних једначина добијамо да је полупречник i-тог Њутновог прстена дат са $r_i = \sqrt{R\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)}$.



Слика 3: уз решење задатка 5



Слика 4: уз решење задатка 5

б) Пошто су у табели дати редни бројеви Њутнових прстенова и њихови полупречници, потребно је претходну једначину линеаризовати тако да се јавља линеарна зависност r_i од i. За ово је довољно квадрирати претходну једначину. На овај начин добијамо $r_i^2 = R\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)$. Одавде се види да зависност r_i^2 од $i-1/2$ представља праву линију која пролази кроз координатни почетак. Коефицијент правца ове праве зависи од полупречника кривине сочива.

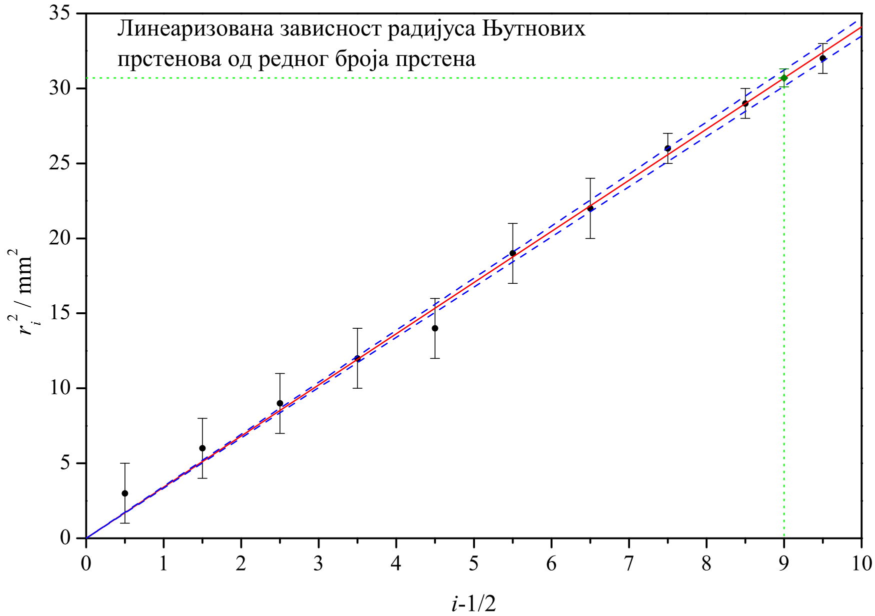
в) Сада табелу можемо да напишемо у нешто другачијој форми (табела 1).

$i-1/2$	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
r_i^2 / [mm^2]	3 (3,24)	6 (5,76)	9 (9,00)	12 (12,25)	14 (14,44)	19 (19,36)	22 (22,09)	26 (26,01)	29 (29,16)	32 (32,49)
Δr_i^2 / [mm^2]	2 (1,80)	2 (1,92)	2 (1,80)	2 (2,1)	2 (1,52)	2 (1,76)	2 (1,88)	1 (1,02)	1 (1,08)	1 (1,14)

Табела 1: Зависност r_i^2 од $i-1/2$

Грешку за квадрат полупречника можемо да нађемо тако што квадрирање посматрамо као множење два иста броја. Одавде закључујемо да је релативна грешка квадрата неке вредности два пута већа од релативне грешке те вредности, односно $\frac{\Delta\left(r_i^2\right)}{r_i^2} = 2\frac{\Delta r_i}{r_i}$, одакле је $\Delta\left(r_i^2\right) = 2r_i\Delta r_i$.

Сада на основу ове табеле можемо да нацртамо график, који је приказан на слици 5.



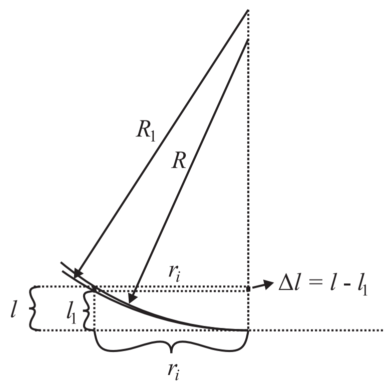
Слика 5: уз решење задатка 5

г) Да бисмо са графика одредили полупречник кривине сочива потребно је да експерименталне тачке фитујемо правом која пролази кроз координатни почетак (што је приказано на графику пуном линијом). Из коефицијента правца ове праве можемо да одредимо полупречник кривине сочива. За одређивање коефицијента правца нам је довољна само једна тачка јер права пролази кроз координатни почетак. На графику је за ово одабрана тачка чија је апсциса 9. Са графика је очитана вредност за ординату 30,7 mm^2. Одавде добијамо да је коефицијент правца нашег линеарног фита

$k = \frac{30{,}7\,\mathrm{mm}^2}{9} = 3{,}411\,\mathrm{mm}^2$. Да бисмо одредили грешку за коефицијент правца кроз експерименталне тачке повуцимо две најекстремније праве које крећу из координатног почетка и које обухватају све експерименталне тачке у оквиру експерименталних грешака. Ове праве су приказане на графику испрекиданим линијама. На основу ове две праве и тачке коју смо користили за одређивање k можемо да видимо да је грешка за r_i^2 за ову тачку $\Delta r_i^2 = 0{,}6\mathrm{mm}^2$. Сада можемо да пишемо $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta r_i^2}{r_i^2}$, одакле је $\Delta k = k\frac{\Delta r_i^2}{r_i^2} = 0{,}0666\,\mathrm{mm}^2 \approx 0{,}07\,\mathrm{mm}^2$. Сада на основу задатка под б) можемо да закључимо $R = \frac{k}{\lambda} = 5{,}390\,\mathrm{m}$. Релативна грешка полупречника кривине сочива је једнака релативној грешци коефицијента правца па добијамо $\Delta R = R\frac{\Delta k}{k} = R\frac{\Delta r_i^2}{r_i^2} = 5{,}390\,\mathrm{m}\frac{0{,}6\,\mathrm{mm}^2}{30{,}7\,\mathrm{mm}^2} = 0{,}105\,\mathrm{m} \approx 0{,}1\,\mathrm{m}$. Сада можемо да пишемо да је $R = 5{,}4(1)\,\mathrm{m}$.

д) На слици 6 дат је случај два сочива мале разлике полупречника кривина. Услов за формирање максимума практично је исти као и раније, односно $\Delta l = l - l_1 = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$. Величине l и l_1 такође могу да се израчунају као и раније, односно имамо да је $l \approx \frac{r_i^2}{2R}$ и $l_1 \approx \frac{r_i^2}{2R_1}$. Из претходне три једначине добијамо $\frac{r_i^2}{2R} - \frac{r_i^2}{2R_1} = \Delta l = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $\frac{r_i^2}{2}\frac{R_1 - R}{R_1 R} = \frac{\lambda}{2}\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $r_i^2\frac{\Delta_{R_1R}}{R^2} = \lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)$, $r_i = \sqrt{\frac{R^2}{\Delta_{R_1R}}\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)}$. Притом је узето да је $R_1 R \approx R^2$ јер се полупречници веома мало разликују. Са Δ_{R_1R} је означена разлика полупречника кривина два сочива.

ђ) Добијена формула може да се напише у нешто другачијем облику $\Delta_{R_1R} = \frac{R^2}{r_i^2}\lambda\left(i - \frac{1}{2}\right)$. Из ове формуле може директно да се добије разлика полупречника ако је познат један од њих. За дати пример добијамо $\Delta_{R_1R} = \frac{5{,}4^2\,\mathrm{m}^2}{0{,}018^2\,\mathrm{m}^2}632{,}8\cdot10^{-9}\mathrm{m}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0{,}0285\mathrm{m}$. Релативну грешку разлике можемо да напишемо као $\frac{\Delta(\Delta_{R_1R})}{\Delta_{R_1R}} = 2\left(\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta r_i}{r_i}\right)$ одакле добијамо $\Delta\left(\Delta_{R_1R}\right) \approx 0{,}01\,\mathrm{m}$. Сада можемо да пишемо $\Delta_{R_1R} = 0{,}03(1)\,\mathrm{m}$.



Слика 6: уз решење задатка 5

е) Пошто је $\Delta_{R_1R} = R_1 - R$ онда је $R_1 = R + \Delta_{R_1R} = 5{,}4\,\mathrm{m} + 0{,}03\,\mathrm{m} = 5{,}43\,\mathrm{m}$. Грешка мерења R_1 је $\Delta R_1 = \Delta R + \Delta\left(\Delta_{R_1R}\right) = 0{,}1\,\mathrm{m} + 0{,}01\,\mathrm{m} \approx 0{,}1\,\mathrm{m}$. Сада можемо да пишемо $R_1 = 5{,}4(1)\,\mathrm{m}$. Треба приметити да је ово иста вредност као за R. Наиме, као што је речено у тексту задатка и као што може да се види из задатка под д), полупречник Њутнових прстенова у овом случају директно мери разлику полупречника кривина. Захваљујући овоме, овом методом можемо да измеримо и разлике полупречника кривина које не можемо да одредимо директним мерењем полупречника и тражењем њихове разлике.