47. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ

IV РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ

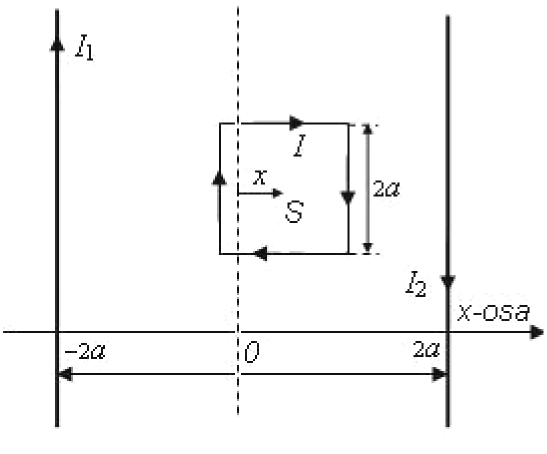
VIII ГИМНАЗИЈА
БЕОГРАД
04.04.2009.

1. Квадратни рам, странице $2a$, је постављен у раван у којој леже два веома дугачка паралелна проводника чије је међусобно растојање $4a$ (слика 1). При томе су две (наспрамне) странице рама паралелне дугачким проводницима. Кроз рам протиче струја у смеру казаљке на сату, а кроз дугачке проводнике струје I_1 и $I_2>I_1$. Бирајући x-осу као на слици, наћи x-координату средишта рама S у положају **стабилне** равнотеже; одговор образложити. Сматрати да је рам крут, да је стално у равни и да на њега делују једино Амперове силе. Сматрати, такође, да су дугачки проводници крути и непомични. Није потребно разматрати случајеве када се странице рама паралелне са дугачким проводницима поклапају са тим проводницима. **(25п)**

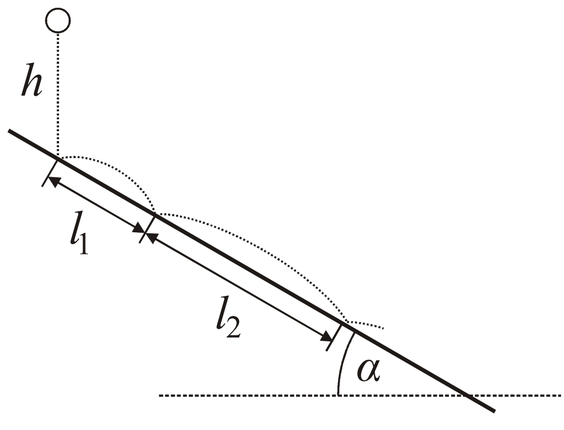
2. Лоптица падне са висине h на стрму раван, нагибног угла α (слика 2), од које се еластично одбија. Колика су растојања l_1, l_2, l_3, ... суседних тачака додира лоптице и стрме равни? Занемарити отпор ваздуха. **(22п)**

3. Између две хоризонталне стаклене плочице налази се кап живе, коефицијента површинскогнапона α, која има облик диска полупречника R и висине h. Претпостављајући да је $h<<R$ наћи масу тега m који треба ставити на горњу плочицу да би се растојање између плочица смањило n пута. Угаоквашења је θ. **(18п)**

4. Електрон се налази у потенцијалној јами ширине a. Наћи однос W_2/W_1, где су W_2 и W_1 вероватноће налажења електрона између $a/4$ и $3a/4$ на првом побуђеном и основном нивоу, респективно. Вероватноћа налажења честице је дата као интеграл густине вероватноће по одређеном делу простора. **(15п)**

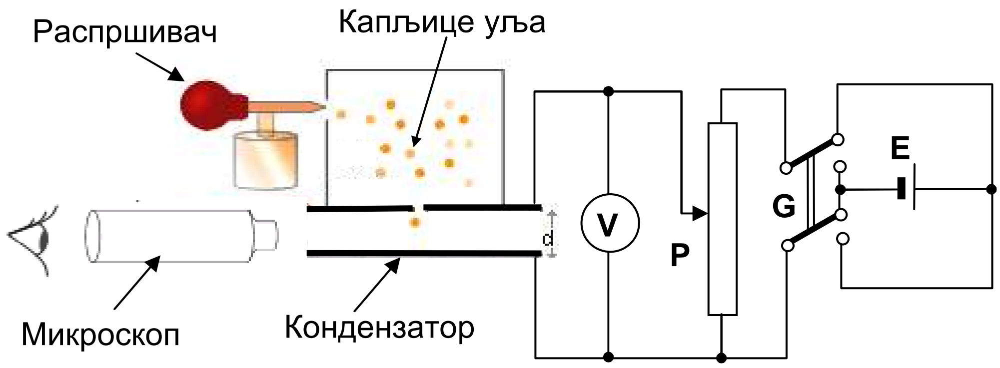


Слика 1



Слика 2

5. Одређивање елементарног наелектрисања Миликеновом (Millikan) методом. Уређај за одређивање неаелектрисања електрона (елементарног наелектрисања) Миликеновом методом шематски је приказан на слици 5. Састоји се од плочастог кондензатора чије су плоче хоризонталне и на сталном растојању d=9,8 mm. У простору између плоча кондензатора температура је константна и због специфичне конструкције онемогућено је струјање ваздуха. На горњој плочи кондензатора се налази мали кружни отвор кроз који се помоћу пумпице са распршивачем убацују капљице уља у простор између плоча кондензатора. Распршивач обезбеђује да капљице буду изразито малих димензија и сферног облика. Капљице се спонтано наелектришу распршивањем или хватањем јона којих у мањој количини увек има у ваздуху. Капљице уља које прођу кроз мали кружни отвор и налазе се између плоча кондензатора, се посматрају помоћу микроскопа. Разлика потенцијала се доводи на плоче кондензатора из извора једносмерног напона (E) преко потенциометра (P) и мери се помоћу волтемтра (V). Поларитет напона (смер елективног поља) који се доводи на плоче може да се мења помоћу преклопника (G), а условљен је наелектрисањем капљице (позитивно или негативно).



Слика 5

У простору између плоча кондензатора, убачене капљице се крећу на ниже. Довођењем одређеног напона U на плоче кондензтора подеси се да нека капљица мирује, и измери се тај напон. Скидањем напона са плоча кондензатора (плоче се рецимо кратко споје или/и уземље) аутоматски се укључује и хронометар који мери време t за које посматрана капљица пређе одређени пут s између два подеока у видном пољу микроскопа. Пошто су капљице веома малих димензија и масе сматра се да оне врло брзо у слободном паду достигну сталну брзину и да важи Стоксов закон $F_v = 6\pi\eta rv$ где су: F_v – сила вискозног трења, η – коефицијент вискозности ваздуха, r – полупречник капљице и v – брзина капљице.

У следећој табели су дата времена t слободног пада капљица уља за које оне пређу пут s = 3,4 mm између два подеока у видном пољу микроскопа, и напони U при којима дате капљице мирују у електричном пољу кондензатора.

t [s]	8,94	10,26	10,57	11,62	11,48	11,41	12,6	13,87	15,78	17,25
U [V]	3060	4080	3020	3460	3400	3420	4990	3780	3290	1420

а) Одредити брзине падања v и полупречнике r капљица уља узимајући у обзир силу вискозног трења, силу потиска и гравитациону силу које делују на капљицу. Густине уља и ваздуха су ρ=890 kg/m^3 и ρ_v=1,292 kg/m^3, респективно. Коефицијент вискозности ваздуха је η=18,43 μPa·s. Убрзање Земљине теже је 9,81 m/s^2.
б) Наћи око којих вредности се групишу вредности наелектрисања капљица. Наћи средње вредности наелектрисања тих група. Проверити како се односе средње вредности наелектрисања суседних група. Знајући да ти односи представљају односе суседних целих бројева наћи број елементарних наелекрисања у свакој групи.
в) На основу резултата добијених под б) израчунати вредност елементарног наелектрисања.
Није потребно процењивати грешке ни за један резултат! (20п)

Задатке припремио: *мр Александар Крмпот,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Ђорђе Спасојевић,* Физички факултет, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,* Физички факултет, Београд

47. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2008/2009. ГОДИНЕ

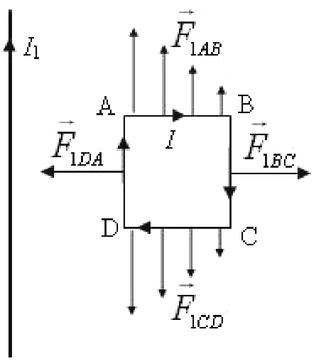
IV РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

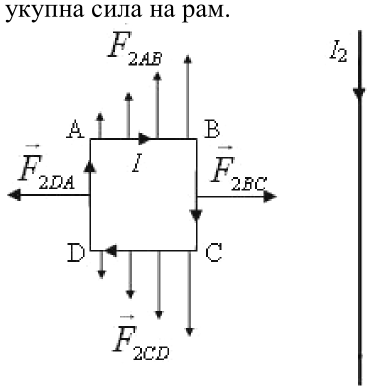
VIII ГИМНАЗИЈА
БЕОГРАД
04.04.2009.

1. Амперова сила на проводник дужине L кроз који протиче струја I и који се налази у магнетном пољу индукције B једнака је $F = ILB\sin\varphi$ **(1п)**, где је φ угао који заклапају проводник и правац магнетног поља.

Силе које потичу од магнетног поља B_1 које ствара струја I_1 су приказане на слици 1а. Пошто поље B_1 дуж правца нормалног на проводник **опада** (индукција магнетног поља бесконачно правог проводника, кроз који тече струја I на растојању r од проводника, једнака је $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$) следи да на странице AB и CD неће деловати константна сила по јединици дужине. Али, на сваки делић странице AB делује сила $\vec{F}_{1AB}$ истог интензитета и правца, а супротног смера од силе $\vec{F}_{1CD}$ која делује на одговарајући делић странице CD, па ће се те силе поништавати **(2п)**. Исто важи и за силе које потичу од поља B_2 које ствара струја I_2 (слика 1б) **(2п)**. Стога је довољно срачунати силе на странице BC и DA квадратног рама. Ове силе су паралелне x-оси, па је таква и укупна сила на рам.



Слика 1а



Слика 1б

Нека је F пројекција укупне силе на рам (F је веће од 0 када је укупна сила паралелна x-оси). Вреди: $F = F_{DA} + F_{BC}$ **,(1п)** где је F_{DA} укупна сила на страницу DA рама, а F_{BC} укупна сила на страницу BC рама. Такође је $F_{DA} = F_{1DA} + F_{2DA}$ **(1п)**, где је F_{1DA} сила од струје I_1, а F_{2DA} од струје I_2. Слично је $F_{BC} = F_{1BC} + F_{2BC}$ **(1п)**. Обзиром да магнетна индукција од струје I_1 има вредност $B_{1DA} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\cdot\frac{1}{a+x}$ на страници DA, можемо писати $F_{1DA} = -2IaB_{1DA} = -2Ia\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\cdot\frac{1}{a+x}$ **(2п)**, где је I јачина струје кроз рам. Слично: $F_{2DA} = -2IaB_{2DA} = -2Ia\cdot\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\cdot\frac{1}{3a-x}$ **(2п)**, $F_{1BC} = 2IaB_{1BC} = 2Ia\cdot\frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\cdot\frac{1}{3a+x}$ **(2п)**, $F_{2BC} = 2IaB_{2BC} = 2Ia\cdot\frac{\mu_0 I_2}{2\pi}\cdot\frac{1}{a-x}$ **(2п)**, те је укупна сила $F = F_{1DA} + F_{2DA} + F_{1BC} + F_{2BC}$ једнака $F = \frac{\mu_0 Ia}{\pi}\left(\frac{I_1}{3a+x} + \frac{I_2}{a-x} - \frac{I_1}{a+x} - \frac{I_2}{3a-x}\right)$, односно:

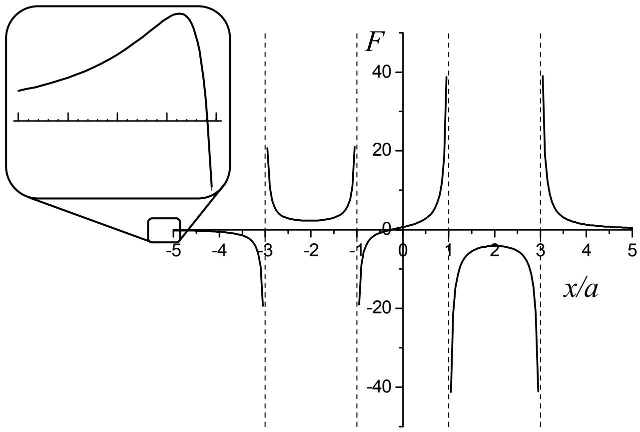
$$F = \frac{2\mu_0 Ia^2}{\pi}\left[\frac{I_2}{(a-x)\cdot(3a-x)} - \frac{I_1}{(a+x)\cdot(3a+x)}\right] \textbf{(2п)}. \qquad (1)$$

Када је рам у равнотежном положају, тада је $F = 0$. Одавде добијамо једначину $(3a+x)(a+x)I_2 = (a-x)(3a-x)I_1$ **(1п)** за равнотежне положаје рама. Ова једначина се даље може претставити у облику

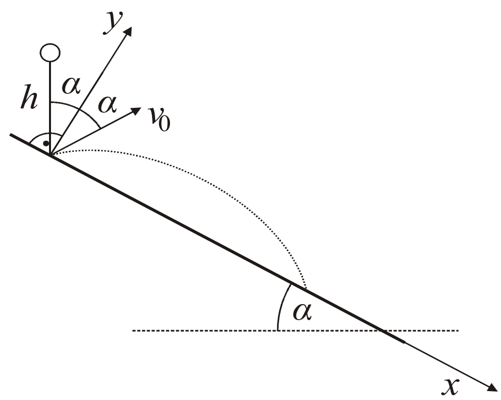
$$x^2 + 4a\frac{I_2 + I_1}{I_2 - I_1}x + 3a^2 = 0 \ \textbf{(1п)}.$$

Њена решења су: $\boxed{x_- = -\frac{a}{I_2 - I_1}\left[\sqrt{I_1^2 + 14I_1I_2 + I_2^2} + 2(I_1 + I_2)\right]}$ - положај **стабилне равнотеже (2п)** и $\boxed{x_+ = -\frac{a}{I_2 - I_1}\left[\sqrt{I_1^2 + 14I_1I_2 + I_2^2} - 2(I_1 + I_2)\right]}$ - положај лабилне равнотеже. **<u>Детаљно образложење</u>:** на основу (1), укупна сила F је рационална функција координате x. Њени полови (тачке где није дефинисана) су: $x_1 = -3a$, $x_2 = -a$, $x_3 = a$ и $x_4 = 3a$. Када x тежи неком од полова, функција тежи ка бесконачности и то тако да при проласку кроз пол функција мења знак. Нпр. пошто је лимес с лева у првом полу $F(x_1 - 0) = -\infty$ онда је лимес здесна за **исти пол** $F(x_1 + 0) = +\infty$; да је заиста $F(x_1 - 0) = -\infty$ се уверавамо тако што је тада крак BC мало испред проводника са струјом I_1, па веома јака одбојна сила између њих доминира. Аналогно налазимо и преостале лимесе слева у половима: $F(x_2 - 0) = +\infty$, $F(x_3 - 0) = +\infty$ и $F(x_4 - 0) = -\infty$. Уз то F тежи нули када $x \to \pm\infty$. Квалитативан облик зависности *F(x)* је дат на слици 1в.

Видимо да се један равнотежан положај мора налазити у интервалу од $-a$ до a, док се други, при $I_2 \succ I_1$, мора налазити у интервалу од $-\infty$ до $-3a$ (ако би нпр. претпоставили да постоји равнотежни положај између $-3a$ и $-a$ тада би у истом интервалу – види слику – морао да постоји још један, па би било најмање 3 равнотежна положаја). У интервалу од $-a$ до a је равнотежни положај дат (већим) решењем x_+. Он **није стабилан** јер јер је *F(x)* растућа функција у његовој околини, па када координата рама *x* мало порасте сила постаје позитивна, а када *x* опадне сила је негативна; другим речима, када се рам мало изведе из овог равнотежног ка једном од проводника, њега ће тај проводник и привући. Друго (мање) решење x_- **јесте стабилан равнотежни положај** јер је *F(x)* опадајућа функција у његовој околини (видети уметак на слици 1в). Када *x* порасте *F* је негатвино, а када се *x* смањи *F* је позитивно, што значи да сила враћа рам у овој равнотежни положај. **Свако другачије, физички оправдано, образложење ће бити прихваћено. (3п)**



Слика 1в



Слика 2

2. Да би се решио задатак, згодно је координатни систем поставити као на слици 2**(1п)**. Кретање лоптице дуж *y*-осе између удара о стрму раван је равномерно убрзано са убрзањем $a_y = -g\cos\alpha$ **(2п)**. При удару, *y*-компонента брзине лоптице мења смер, али не и интензитет јер је удар еластичан. Закључујемо да се кретање **дуж *y*-осе** између удара **понавља** и да важи $y = v_{0y}t + a_y t^2/2$ **(1п)**, где је *t* време мерено од претходног удара, а $v_{0y} = \sqrt{2gh}\cos\alpha$ **(1п)** компонента брзине лоптице дуж *y*-осе непосредно након одбијања од стрме равни. Знајући да је при удару *y* = 0, можемо да израчунамо време између два удара t_s из $0 = t_s\sqrt{2gh}\cos\alpha - g(\cos\alpha)t_s^2/2$ **(3п)**, одакле је $t_s = 2\sqrt{2gh}/g$ **(1п)**. Кретање лоптице дуж *x*-осе је све време равномерно убрзано са убрзањем $a_x = g\sin\alpha$ **(2п)**, па је $x = v_{0x}t + a_x t^2/2 = t\sqrt{2gh}\sin\alpha + g(\sin\alpha)t^2/2$ **(3п)**, где је *t* време мерено од **првог** удара. Када се у ову једначину замени t_s добија се тражено растојање између места прва два удара $l_1 = 8h\sin\alpha$ **(2п)**. Растојање l_n између *n+1* -вог и *n* –тог места удара добија се као $\boxed{l_n = x(n\cdot t_s) - x((n-1)t_s) = nl_1 = 8nh\sin\alpha}$ **(4+2п)**.

3. Када се на плочицу стави тег, сила којом тег делује на плочицу бива поништена променом силе којом жива делује на плочицу. До ове промене долази услед повећања додирне површине између живе и плочице као и због повећања притиска живе услед површинског напона **(1п)**. Промена додирне површине може да се нађе из чињенице да је жива нестишљива, односно да не мења запремину, и чињенице да се дебљина диска смањила *n* пута. Нови полупречник диска од живе може да се нађе из $V_1 = V \Rightarrow R_1^2\pi h/n = R^2\pi h$ **(3п)**, па се добија $R_1 = \sqrt{n}R$ **(1п)**. Овде је запремина капи живе рачуната као запремина диска (ваљка) јер се деформација услед квашења занемарује због услова *h*<<*R*. Притисак у капи живе услед површинског напона може да се нађе из једначине $p = F_{PN}/S_O$ **(1п)**где је F_{PN} укупна сила површинског напона а S_O је површина омотача диска. Из ове једначине добијамо притисак $p = 2\cdot 2\pi R\alpha|\cos\theta|/(h2\pi R) = 2\alpha|\cos\theta|/h$ **(6п)**. На исти начин се добија и притисак када се стави тег: $p_1 = 2\cdot 2\pi R_1\alpha|\cos\theta|/(h_1 2\pi R_1) = 2\alpha n|\cos\theta|/h$ **(3п)**. Уз помоћ нађених израза коначно се добија: $\boxed{m = (p_1S_1 - pS)/g = 2\alpha|\cos\theta|(n^2-1)R^2\pi/(hg)}$ **(3п)**.

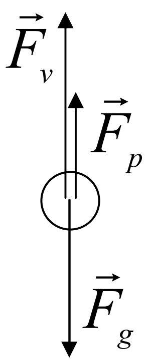
4. Таласне функције елекрона у основном и првом побуђеном стању у потенцијалној јами ширине a су:

$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ **(1п)** , $\Psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ **(1п)**,респективно.

Стога је тражени однос вероватноћа: $\dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{\int_{x_1}^{x_2}\Psi_2^2(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2}\Psi_1^2(x)dx} = \dfrac{\frac{2}{a}\int_{a/4}^{\frac{3}{4}a}\sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right)dx}{\frac{2}{a}\int_{a/4}^{\frac{3}{4}a}\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx}$ **(5п)**

Сменом $u' = \frac{2\pi}{a}x$ **(1п)**променљиве интеграла у броиоцу израза за W_2/W_1 добија се да је $dx = \frac{a}{2\pi}du'$ **(1п)**, а границе интеграције су од $\pi/2$ до $3\pi/2$ **(1п)**. Сличном сменом $u = \frac{\pi}{a}x$ **(1п)** у имениоцу добија се: $dx = \frac{a}{\pi}du$ **(1п)**, а границе интеграције су од $\pi/4$ до $3\pi/4$ **(1п)**. Тако налазимо:

$$\boxed{\frac{W_2}{W_1} = \frac{\frac{2}{a}\frac{a}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^2 u'du'}{\frac{2}{a}\frac{a}{\pi}\int_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2 udu} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{u'}{2}-\frac{\sin 2u'}{4}\right)\Big|_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi}}{\left(\frac{u}{2}-\frac{\sin 2u}{4}\right)\Big|_{\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi}} = \frac{\pi}{\pi+2} = 0{,}611}$$ **(2п)**.



Слика 5

5. Када тело сферног облика, односно капљица уља у нашем случају, пада кроз хомогену вискозну средину на њега делују сила Земљине теже (F_g), сила потиска (F_p) и сила вискозног трења (F_v). Са повећањем брзине тела сила вискозног трења се повећава, а убрзање се смањује. У једном тренутку убрзање тела ће постати једнако нули а брзина константна тако да важи $F_g - F_p - F_v = 0$ **(0,5п)** (слика 5). Због својих малих димензија капљица уља ће врло брзо доћи у овакво стање равнотеже, тако да сматамо да се целом дужином пута креће равномерно. Пошто масу тела можемо да одредимо као производ густине и запремине онда за сферну куглицу важи $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_v g - 6\frac{4}{3}\pi\eta r v = 0$ **(1п)**. Полупречник сферне куглице се из претходне једначине може одредити као $r = \sqrt{\dfrac{9\eta v}{2g(\rho-\rho_v)}}$ **(1п)**. Знајући да је брзина $v=s/t$ можемо да израчунамо полупречник и брзину сваке капљице што је дато у табели.

Бр.	U [V]	t [s]	v [$\cdot 10^{-4}$ m/s]	r [$\cdot 10^{-6}$ m]	q [$\cdot 10^{-19}$ C]
1	3060	8,94	3,80313	1,90207	8,04798
2	4080	10,26	3,31384	1,77551	4,90945
3	3020	10,57	3,21665	1,74928	6,343
4	3460	11,62	2,92599	1,66837	4,80318
5	3400	11,48	2,96167	1,67851	4,97763
6	3420	11,41	2,97984	1,68365	4,99413
7	4990	12,6	2,69841	1,60218	2,94957
8	3780	13,87	2,45133	1,52707	3,37138
9	3290	15,78	2,15463	1,43167	3,19196
10	1420	17,25	1,97101	1,36931	6,47057
			(1п)	**(1п)**	**(1,5п)**

Уколико, сада сферно тело има наелектрисање чија је апсолутна вредност q, и пада између плоча кондензатора, на њега ће поред поменутих сила деловати још и сила одговарајућег електричног поља $F_E = qE$ **(0,5п)** где је E јачина електричног поља између плоча кондензатора. Окретањем потенциометра могуће је подесити напон тако да капљица мирује па је тада $F_g = F_p + F_E$ **(0,5п)**. Знајући да је $E=U/d$ **(0,5п)** можемо писати да је $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_v)g = \frac{qU}{d}$ **(0,5п)**. Из последње једначине следи да се апсолутна вредност налектрисања одрђене капљице може израчунати као $q = \frac{6\pi\eta r v d}{U}$ **(2п)** што је такође дато у табели.

Из добијених резултата за наелектрисања капљица јасно се види да се оне групишу око појединих вредности. Средње вредности наелектрисања тих група су: $\langle q\rangle_1$= 8,04798 C где имамо само једну капљицу, $\langle q\rangle_2$= 6,40678 C где имамо две капљице, $\langle q\rangle_3$= 4,92109 C где имамо четири капљице и $\langle q\rangle_4$= 3,17097 C где имамо три капљице **(3п)**. Односи наелектрисања ових група су: $\langle q\rangle_1/ \langle q\rangle_2 = 1{,}256 \approx 5/4$,

$\langle q\rangle_2/ \langle q\rangle_3 = 1{,}302 \approx 4/3$

$\langle q\rangle_3/ \langle q\rangle_4 = 1{,}552 \approx 3/2$ **(3п)**

Сада је јасно да су капљице у првој групи наелектрисане са n_1=5 елементарна наелектрисања, капљице у другој групи са n_2=4, у трећој са n_3=3 и у четвртој са n_4=2 елементарна наелектрисања. Вредност елементарног наелектрисања можемо да нађемо тако што ћемо сабрати наелектрисања свих капљица и поделити их са укупним бројем елементарних наелектрисања којима су те капљице наелектрисане

$$\boxed{e = \frac{q_1 + q_2 + ... + q_{10}}{1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + 4\cdot n_3 + 3\cdot n_4} = \frac{50{,}0574\cdot 10^{-19}\,C}{31} = 1{,}61475\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}$$ **(3+1п)**