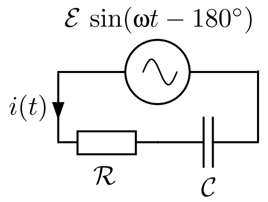
1. Мисаоно изделимо цилиндар по дужини на $N_\ell \to \infty$ танких навојака, сваки екстремно мале дужине $\mathrm{d}\ell = \ell/N_\ell$, а затим изделимо сваки навојак по ободу на $N_\varphi \to \infty$ делића, сваки лучно закривљен под врло малим углом $\mathrm{d}\varphi = 2\pi/N_\varphi$. Ако цилиндар ротира тренутном угаоном брзином $\omega(t)$, наелектрисање $\sigma \times (r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\ell)$ на ободу делића, који је готово правоугаони (површине $r\mathrm{d}\varphi \times \mathrm{d}\ell$), ће протећи за време $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\omega(t)$. На тај начин јачина електричне струје која ефективно циркулише по ободу сваког навојка, а има их $1/\mathrm{d}\ell$ по јединици дужине, је $\mathrm{d}i = \sigma r\omega(t)\mathrm{d}\ell$ $\boxed{\textbf{4п}}$. У аналогији са индукцијом магнетног поља идеалне завојнице налазимо да је $B(t) = \mu_0\mathrm{d}i/\mathrm{d}\ell$, па је $\omega_0 = B_0/(\mu_0\sigma r)$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Даље, сада имамо кочиони момент силе константног интензитета $\mathcal{M}$ који ће довести до угаоног успорења чија је тренутна вредност по модулу $\alpha(t)$. Његов ротациони смер је противан ротационом смеру тренутне угаоне брзине интензитета $\omega(t)$ који опадне од ω_0 до 0 за време τ. Међутим, по Ленцовом правилу, појавиће се момент силе који се противи паду тренутне вредности интензитета магнетне индукције унутар цилиндра. $B(t)$ ће у сваком тренутку опадати у времену као $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \mu_0\sigma r\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\mu_0\sigma r\alpha(t)$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Из Фарадејевог закона електромагнетне индукције, по ободу једног навојка се формира индукована електромоторна сила $-\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2 = \mu_0\sigma\pi r^3\alpha(t)$ у смеру којим ротира цилиндар, а која је последица циркулације индукованог електричног поља $E_{\mathrm{ind}}(t) \times 2\pi r$, чији је интензитет $E_{\mathrm{ind}}(t) = \mu_0\sigma r^2\alpha(t)/2$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Ово поље подједнако делује на сваки делић цилиндра по ободу у смеру ротације па је његов укупан момент: $\mathcal{M}_{\mathrm{ind}}(t) = (2\pi r\ell\sigma) \times E_{\mathrm{ind}}(t)r = \mu_0\pi\sigma^2 r^4\ell\alpha(t)$ и противи се смеровима $\mathcal{M}$ и $\alpha(t)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Даље, по Другом Њутновом закону: $\mathcal{I}\alpha(t) = \mathcal{M} - \mathcal{M}_{\mathrm{ind}}(t)$, где је $\mathcal{I} = mr^2$ момент инерције цилиндра $\boxed{\textbf{2п}}$. Одавде се закључује да је $\alpha(t) \equiv \alpha$ константно $\boxed{\textbf{2п}}$ и износи $\alpha = \omega_0/\tau = B_0/(\mu_0\sigma\tau r)$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Такође, већ овде запажамо да је $\mu_0\pi\sigma^2 r^2\ell \equiv m_{\mathrm{em}}$, јер је $\mathcal{M} = \dfrac{(m + \mu_0\pi\sigma^2 r^2\ell)B_0 r}{\mu_0\sigma\tau} = (m + m_{\mathrm{em}})r^2\alpha$ $\boxed{\textbf{2п}}$. С друге стране, рад овог момента се троши на промену кинетичке енергије цилиндра ($\mathcal{I}\omega_0^2/2$) и прираштај енергије магнетног поља ($w_{\mathrm{m}} \times \pi r^2\ell$) чија је запреминска густина на почетку била $w_{\mathrm{m}} = B_0^2/2\mu_0$, одакле заиста добијамо да је рад спољашњег кочионог момента $\dfrac{1}{2}\left(\mathcal{I} + m_{\mathrm{em}}r^2\right)\omega_0^2$ $\boxed{\textbf{1п}}$. *Напомена*: уколико такмичар није показао да је $\alpha(t) \equiv \alpha = \mathrm{const}$ (тј. само је то претпоставио), а сви остали резултати су му тачни, онда осваја максималних 90% од укупног броја бодова. Не признавати бодове за изразе до којих се дошло путем димензионе анализе.

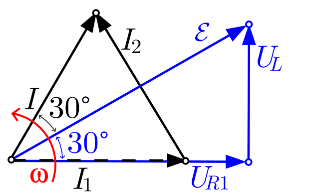
2. Нека је m маса честице, а $q > 0$ њено наелектрисање. У првом случају, узмимо кружну контуру $\mathcal{C}_1$ радијуса R око соленоида у равни која садржи цев. Контура је оријентисана тако (математички циркулациони смер) да се њена оријентација поклапа са смером вектора магнетне индукције, у смислу правила десног завртња, те је магнетни флукс обухваћен овом контуром ненегативан и износи $\Phi^{(\mathcal{C}_1)}(t) = \pi r^2 B(t)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Услед промене магнетног флукса и осне симетрије контуре, на њој ће се индуковати електрично поље константне алгебарске вредности $E_{\mathrm{ind}}^{(\mathcal{C}_1)}$ које циркулише по ободу контуре, такво да је индукована електромоторна сила $\mathcal{E}_{\mathrm{ind}}^{(\mathcal{C}_1)} = 2\pi R E_{\mathrm{ind}}^{(\mathcal{C}_1)}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Према Фарадејевом закону електромагнетне индукције: $\mathcal{E}_{\mathrm{ind}}^{(\mathcal{C}_1)} = -\mathrm{d}\Phi^{(\mathcal{C}_1)}/\mathrm{d}t = -\pi r^2\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ $\boxed{\textbf{2п}}$, те се смер циркулације индукованог електричног поља подудара са смером контуре, јер флукс опада. Нека је након једног кратког временског интервала, $0 \le t \le \tau$, тренутно $B(t)$ опало са B_0 на 0, док је интензитет тренутне брзине честице $v(t)$ (у смеру $P \to Q$) током овог интервала порастао са 0 на v. На тај начин, Други Њутнов закон записујемо као $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = qE_{\mathrm{ind}}^{(\mathcal{C}_1)} = -\dfrac{qr^2}{2R}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, што се на читавом интервалу преводи у $2R(v - 0) = q_{\mathrm{m}}r^2(B_0 - 0)$, па се за почетну брзину добија да је $v = q_{\mathrm{m}}B_0 r^2/2R$ $\boxed{\textbf{2п}}$, што је уједно и стална брзина честице којом она излеће из цеви. У другом случају, узмимо кружну контуру $\mathcal{C}_2$, сада радијуса $2R$, око соленоида у равни која садржи цев. И ова контура је оријентисана тако (математички циркулациони смер) да се њена оријентација поклапа са смером вектора магнетне индукције, у смислу правила десног завртња, те је магнетни флукс обухваћен овом контуром ненегативан и износи $\Phi^{(\mathcal{C}_2)}(t) = \pi r^2 B(t)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Радијус $2R$ је узет, јер је $|OQ| = 2R$, будући да је $\ell = R\sqrt{3}$, тј. $\angle POQ = \pi/3$. Према Фарадејевом закону електромагнетне индукције, укупна индукована електромоторна сила дуж целе контуре је $\mathcal{E}_{\mathrm{ind}}^{(\mathcal{C}_2)} = -\mathrm{d}\Phi^{(\mathcal{C}_2)}/\mathrm{d}t = -\pi r^2\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = k\pi r^2 > 0$ $\boxed{\textbf{2п}}$, те се и овде смер циркулације индукованог електричног поља подудара са смером контуре. Даље, посматрајмо тетиву MQ на кружној контури радијуса $2R$, коју полови тачка P, а која се из центра O види под углом $2\pi/3$. Индуковани пад напона на луку MQ контуре је стога $\mathcal{E}_{\mathrm{ind}}^{(MQ)} = k\pi r^2/3$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Исти пад напона се индукује и дуж тетиве MQ, јер се узимањем нове контуре која је ограничена поменутом тетивом и луком не обухвата никакво промењиво магнетно поље, па је због симетрије проблема пад напона на половини тетиве (тј. дуж саме цеви) двоструко мањи, тј. $U_{PQ} = k\pi r^2/6$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Овим напоном се из мировања убрзава наелектрисана честица, која по напуштању цеви добија кинетичку енергију $mv^2/2 = qU_{PQ}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Напослетку, $v = r\sqrt{\pi q_{\mathrm{m}}k/3}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

3. (а) Капацитивност равног плочастог кондензатора дата је изразом $C(t) = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d(t)}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. По услову задатка је онда $C(t) = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d_0 + d_\mathrm{m}\sin(\omega t)}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ па је на основу дате апроксимације $C(t) = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d_0\left(1 + \dfrac{d_\mathrm{m}}{d_0}\sin(\omega t)\right)} = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_0}\left(1 - \dfrac{d_\mathrm{m}}{d_0}\sin(\omega t)\right)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, па је $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d_0} = 35{,}4\,\mathrm{pF}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ и $C_\mathrm{m} = \dfrac{\varepsilon_0 S d_\mathrm{m}}{d_0^2} = \dfrac{C_0}{10} = 3{,}54\,\mathrm{pF}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$.



(б) Према претпоставци која је наведена у задатку, капацитивност кондензатора, наелектрисање на облогама кондензатора, и напон успостављен на њему су у облику $C(t) = C_0 + c(t)$, $U(t) = U_0 + u(t)$, и $Q(t) = Q_0 + q(t)$, при чему су $c(t) \ll C_0$, $u(t) \ll U_0$, и $q(t) \ll Q_0$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. У устаљеном стању важи $Q_0 = C_0 U_0 = C_0 \mathcal{E}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Тренутно наелектрисање на облогама кондензатора се онда може изразити као: $Q(t) = C(t)U(t)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. На основу Кирхофовог закона за напоне, може се писати $U(t) = \mathcal{E} - i(t)R$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, па се заменом има $Q(t) = (C_0 + c(t))(\mathcal{E} - i(t)R) = C_0\mathcal{E} - RC_0 i(t) + \mathcal{E}c(t) - \cancel{c(t)i(t)R}$, занемарујући производ две мале величине $\boxed{\mathbf{2п}}$. Даље је $Q(t) = \cancel{C_0\mathcal{E}} + q(t) = \cancel{C_0\mathcal{E}} - RC_0 i(t) - \mathcal{E}C_\mathrm{m}\sin(\omega t)$ па је $\underbrace{\dfrac{q(t)}{C_\mathrm{m}}}_{\mathcal{C}} + \underbrace{\dfrac{C_0}{C_\mathrm{m}}}_{\mathcal{R}} R\, i(t) = -\mathcal{E}\sin(\omega t)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

Добијеној једначини одговара коло наизменичне струје сачињено од отпорника отпорности $\mathcal{R} = \dfrac{C_0}{C_\mathrm{m}} R = 10\,\mathrm{M\Omega}$, кондензатора капацитивности $\mathcal{C} = C_\mathrm{m} = 3{,}54\,\mathrm{pF}$ и хармонијске електромоторне силе $\mathcal{E}\sin(\omega t - 180^\circ)$, као што је приказано на слици $\boxed{\mathbf{2п}}$. Амплитуда и фаза тражене струје се онда одређују на основу израза за редно $\mathcal{RC}$ коло, према изразима $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + \left(\dfrac{1}{\omega\mathcal{C}}\right)^2}} \approx 1{,}40\,\mu\mathrm{A}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, и $\psi = 180^\circ - \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{\omega\mathcal{RC}} \approx 109{,}5^\circ$ $\boxed{\mathbf{1п}}$.

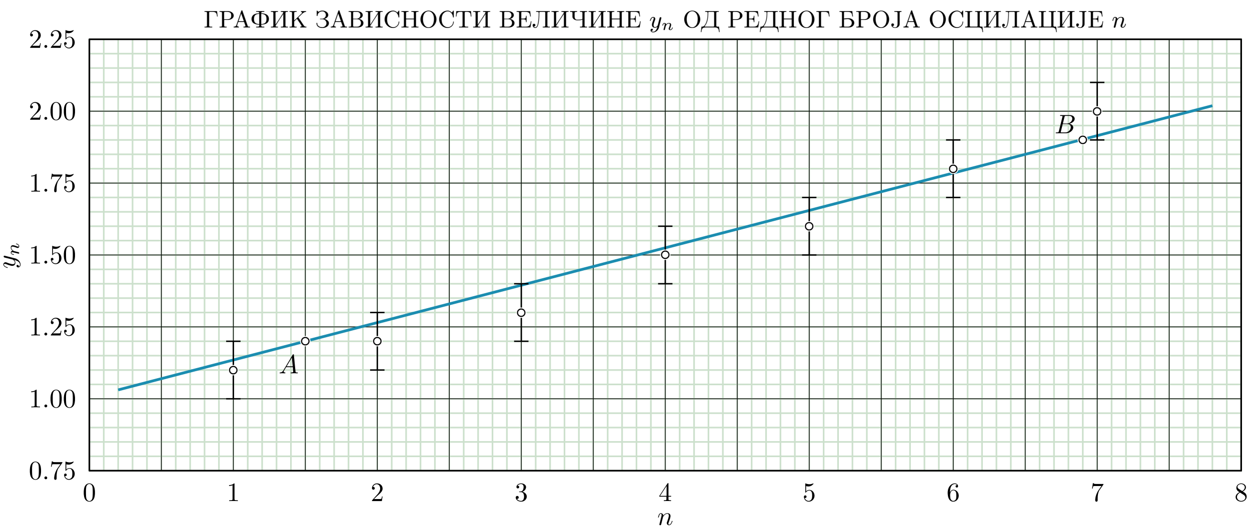


4. На основу Кирхофовог закона за наизменичне струје, фазори струја $\vec{I}$, $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ морају формирати троугао $\boxed{\mathbf{2п}}$. Пошто су ефективне вредности тих струја једнаке, тај троугао онда мора бити и једнакостраничан $\boxed{\mathbf{2п}}$, као што је илустровано на слици. Пошто $\vec{\mathcal{E}}$ касни за угао 30°, фазор *емс*-а одговара симетрали једног угла тог једнакостраничног троугла као што је приказано на слици $\boxed{\mathbf{2п}}$. Са дате слике може се приметити да струја $\vec{I}_2$ предњачи за 90° $\boxed{\mathbf{2п}}$, па закључујемо да се грана R_2-C понаша као кондензатор, те је $R_2 = 0$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Како је тада импеданса кондензатора $\dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{\mathcal{E}}{I_2}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, следи $C = \dfrac{I}{\omega\mathcal{E}} = \dfrac{1}{\omega Z} = 20\,\mu\mathrm{F}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. С друге стране, $\vec{I}_1$ касни за 30° у односу на $\vec{\mathcal{E}}$, па напони $\vec{U}_{R1}$ и $\vec{U}_L$, калема и отпорника у грани 1, формирају правоугли троугао који представља половину једнакостраничног троугла, те важи $U_{R1} = \dfrac{\mathcal{E}\sqrt{3}}{2}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ и $U_L = \dfrac{\mathcal{E}}{2}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Одавде се налазе: $R_1 = \dfrac{U_{R1}}{I_1} = \dfrac{\mathcal{E}\sqrt{3}}{2I} = \dfrac{Z\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\,\Omega \approx 43{,}3\,\Omega$ $\boxed{\mathbf{2п}}$ и $\omega L = \dfrac{U_L}{I_1} \Rightarrow L = \dfrac{\mathcal{E}}{2\omega I} = \dfrac{Z}{2\omega} = 25\,\mathrm{mH}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

5. Са графика зависности $x(t)$ примећујемо да је апсолутна грешка којом се очитавају све амплитуде $\Delta A(n) \equiv \Delta A = 0{,}1\,\mathrm{cm}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, и да је период осциловања тачно $T = 0{,}2\,\mathrm{s}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Даље, погодно је скицирати линеарни график функције $y_n = 1 + \kappa n$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, где је $y_n \equiv \dfrac{x(0)}{A(n)}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, а $\kappa \equiv \dfrac{\pi}{Q}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. За израз за апсолутну грешку y_n се добија да је $\Delta y_n = \dfrac{\Delta A}{A(n)}(1 + y_n)$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Очитавајући податке са графика зависности $x(t)$ долазимо до следеће табеле са релевантним подацима за $n \in \{1{,}2, \ldots 7\}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$ у којој је $\Delta y_n \equiv \Delta y = 0{,}1$ свуда заокружено ради униформности апсолутне грешке на линеарном графику функције $y_n = 1 + \kappa n$, јер Δy_n расте како n расте и почиње од око 0,05 за $n = 1$ до око 0,12 за $n = 7$.

n	$(A(n) \pm \Delta A)$ [cm]	$y_n \pm \Delta y$
1	$4{,}4 \pm 0{,}1$	$1{,}1 \pm 0{,}1$
2	$4{,}0 \pm 0{,}1$	$1{,}2 \pm 0{,}1$
3	$3{,}6 \pm 0{,}1$	$1{,}3 \pm 0{,}1$
4	$3{,}2 \pm 0{,}1$	$1{,}5 \pm 0{,}1$
5	$3{,}0 \pm 0{,}1$	$1{,}6 \pm 0{,}1$
6	$2{,}6 \pm 0{,}1$	$1{,}8 \pm 0{,}1$
7	$2{,}4 \pm 0{,}1$	$2{,}0 \pm 0{,}1$

На основу података датих у табели скициран је график линеарне зависности бездимензионе величине y_n од редног броја осцилације n у седам тачака $\boxed{\mathbf{3п}}$.



Одабиром тачака $A(1{,}5; 1{,}2)$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ и $B(6{,}9; 1{,}9)$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ се за коефицијент правца добија да је $\kappa = \dfrac{y_n^{(B)} - y_n^{(A)}}{n^{(B)} - n^{(A)}} = 0{,}1296\ldots$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, а $\Delta\kappa = \dfrac{2\Delta y}{n^{(B)} - n^{(A)}} = 0{,}0371\ldots$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, па је $\kappa = 0{,}13 \pm 0{,}04$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Одавде је $Q = \dfrac{\pi}{\kappa} = 24{,}2351\ldots$, а $\Delta Q = \dfrac{\pi\Delta\kappa}{\kappa^2} = 7{,}4357\ldots$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, односно $Q = 24 \pm 8$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, што је далеко веће од 1 и што важи за слабо пригушене системе. Даље, на основу дате апроксимације у формулацији задатка, $\beta = \dfrac{\kappa}{T}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, те је $\beta = (0{,}6 \pm 0{,}2)\,\mathrm{s}^{-1}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, што је далеко мање од $\dfrac{2\pi}{T} = 10\pi\,\mathrm{s}^{-1}$.

Задатке припремили: *Данило Ђокић*, Електротехнички факултет, Београд; *Јанко Пойовић*, Тринити колеџ, Кембриџ.
Рецензенти: *др Дејан Ђокић*, Институт за физику у Београду; *йроф. др Ненад Сшевановић*, ПМФ Крагујевац.
Председник комисије: *йроф. др Имре Гуш*, Департман за физику, Нови Сад.