ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2022/2023. ГОДИНЕ.

III РАЗРЕД

Друштво физичара Србије
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА Алфа

ОПШТИНСКИ НИВО
04.02.2023.

1. Док је честица изнад xy равни, на њу делује Лоренцова сила нормално на правац брзине и зато ће се кретати по кружници чији полупречник налазимо овако (услов кружног кретања: једнаке центрифугалне и Лоренцове силе): $m\frac{v^2}{r_y} = qvB_y$, $r_y = \frac{mv}{qB_y}$ **(4п)**. Аналогно је $r_x = \frac{mv}{qB_x}$ **(4п)** кад је честица испод xy равни. Пошто честица у почетку има брзину v нагоре, она ће се кретати по кружници (нормалној на y осу) док је изнад xy равни, тј. обрнуће један полукруг пре него што пређе на доњу страну xy равни. Дакле, координате након првог пресека са xy равни су $(-\frac{2mv}{qB_y}, 0,0)$ **(4п)** (двојку добијамо јер се честица померила за пречник од координатног почетка, а $-$ добијамо из смерова магнетног поља и брзине). Сада је вектор брзине усмерен надоле, па ће се честица опет кретати по кружници (нормалној на x осу), и аналогно добијамо да су координате након другог пресека $(-\frac{2mv}{qB_y}, -\frac{2mv}{qB_x}, 0)$ **(4п)**. Приметимо да је сада брзина опет усмерена на горе, као и на почетку. Из тога закључујемо да ће се честица при сваком пресеку наизменично померати за $-\frac{2mv}{qB_y}$ дуж x осе, односно за $-\frac{2mv}{qB_x}$ дуж y осе. Пошто имамо n пресека, честица ће бити $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ пута изнад **(1п)**, а $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ пута испод xy равни **(1п)**, и онда наше крајње координате морају бити $(-\lceil\frac{n}{2}\rceil\frac{2mv}{qB_y}, -\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\frac{2mv}{qB_x}, 0)$ **(2п)**.

2. Прво уочимо две гране паралелне везе. Ако кроз једну грану тече струја амплитуде I_1, а кроз другу I_2, амплитуда напона на крајевима прве гране мора бити $I_1 \cdot \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|$, а на крајевима друге $I_2 \cdot \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|$, па онда очигледно $I_1 = I_2 = I$ **(6п)**, укључујући и фазе, пошто је фаза напона у односу на струју једнозначно одређена из знака апсолутне вредности која је иста за оба израза (пошто су напони на крајевима грана једнаки, и импедансе грана исто једнаке, онда кроз обе гране морају да теку струје истих амплитуда и фаза). Затим делимо задатак на два случаја у зависности од апсолутне вредности:

   1° $\omega L \geq \frac{1}{\omega C}$, тј. $\omega \geq \sqrt{\frac{1}{LC}}$ Означимо са D тачку која се налази са "горње" стране извора напона:

   $\varphi_b - \varphi_a = (\varphi_d - \varphi_a) - (\varphi_d - \varphi_b) = I\omega L - (-I\frac{1}{\omega C})^* = I(\omega L + \frac{1}{\omega C})$ **(4п)**

   *иде минус код $I\frac{1}{\omega C}$ јер тај напон има супротну фазу од $I\omega L$

   Како је $U_0 = I \cdot \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = I \cdot (\omega L - \frac{1}{\omega C})$, имамо: $\omega L + \frac{1}{\omega C} = k(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ **(1.5п)**. Ово је квадратна једначина по ω, али посматрамо само позитивно решење јер је ω позитиван реалан број, и добијамо $\omega = \sqrt{\frac{k+1}{(k-1)LC}}$ **(1п)**. Након провере да ли се ова вредност уклапа у интервал из услова по којим делимо на случајеве потврђујемо да је ово валидно решење **(0.5п)**.

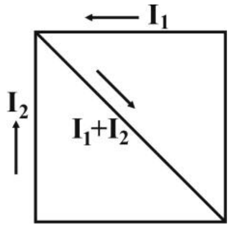
   2° $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, тј. $\omega < \sqrt{\frac{1}{LC}}$

   Скроз аналогно првом случају добијамо $\omega = \sqrt{\frac{k-1}{(k+1)LC}}$ **(аналогно и бодовање)**.

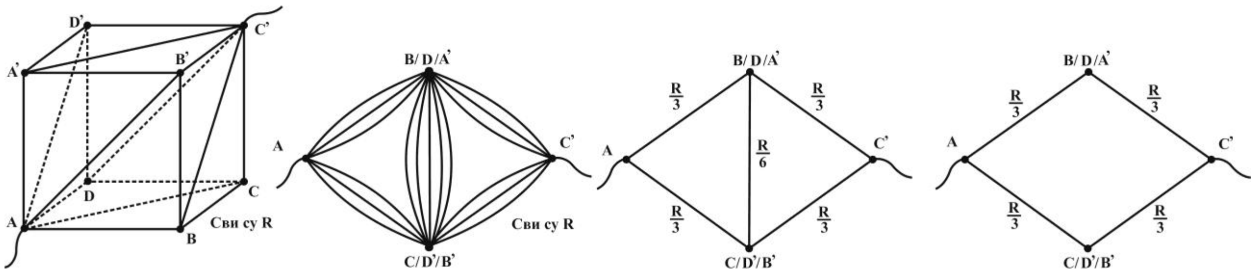
3. Испитајмо прво ситуацију пре него што заторимо прекидач. Пошто је $B = \alpha t$ за неку позитивну константу α, имаћемо електромотрну силу $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \alpha S$ **(3п)**, где је S површина рама. Ова електромоторна сила се јавља у контури и изједначавамо је са падом напона који добијамо од индуковане струје која тече: $\alpha S = 4IR$ **(3п)**, где је R отпорност једне странице, а I струја која тече кроз њега у овом случају.

   Разматрајмо сад шта се дешава када затворимо прекидач. Нека кроз део изнад дијагонале тече струја I_1, испод дијагонале I_2, а кроз дијагоналу $I_1 + I_2$ (у смеровима са слике 3). Када се са дијагоналом површина подели на два троугла, индуковане електромоторне силе се јављају у обе контуре, али због преполовљене површине њихове вредности су упола од предходне. За горњи троугао пишемо једначину као што смо радили пре затварања прекидача и пазимо на знакове: $\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha S = 2I_1R + (I_1 + I_2)R_1$ **(4п)**, где је R_1 отпорност дијагонале (прихвата се и $R_1 = R\sqrt{2}$, али нам не треба то). Исто пишемо за троугао испод дијагонале: $\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha S = -2I_2R - (I_1 + I_2)R_1$ **(4п)**. Кад одузмемо ове две једначине добијамо $0 = 2(R + R_1)(I_1 + I_2)$, из чега следи $I_1 + I_2 = 0$ **(3п)** (кроз дијагоналу не тече струја). Дакле, I_2 је супротног смера и по интензитету је једнако I_1. Уочимо још да $4IR = \alpha S = 2(\frac{1}{2}\alpha S) = 2(2I_1R + (I_1 + I_2)R_1) = 4I_1R$, па је $I_1 = I$ **(2п)**. Из овога закључујемо да конфигурација остаје идентична након што се затвори прекидач, па се ни снага електричне струје не мења **(1п)**.

НАПОМЕНА: ако је ученик без икаквог додатног објашњења решио или доцртавао батерије (као еквивалент ефектима електромагнетне индукције) без коментара и онда писао Кирхофове законе, рад треба оценити са коефицијентом 0.8 (нпр. ако је урадио све добро али је доцртавао батерије треба дати 0.8 * 20 = 16 поена). Овај коефицијент се уводи јер се добијају различити резултати у зависности од тога да ли се те батерије ставе на дијагоналу или на квадрат, па ако нема додатног објашњења подразумева се да је ученик имао среће и да их је случајно нацртао на местима која дају тачно решење.



4. Прво уочимо симетрију између тачака B, D и A'. Из симетрије следи да ако конфигурацију вежемо за извор напона, онда ће те тачке бити на истом потенцијалу па (пошто имају отпор) кроз гране BD, DA' и $A'B$ не тече струја и можемо их уклонити **(4п)**. Исто урадимо за темена C, D', B' и странице CD', $D'B'$, $B'C$ **(4п)** (слика 4.1). Потом групишемо тројке темена која су на истом потенцијалу B, D, A' и C, D', B' (слика 4.2) **(4п)**. Потом заменимо све паралелне везе њима еквивалентним отпорностима **(3п)** (слика 4.3). Потом из симетрије следи да можемо да занемаримо средњу грану **(3п)** (слика 4.4). За крај се решимо редних и паралелних веза и добијамо резултат $R_e = \frac{R}{3}$ **(2п)**.



Слика 4.1. 4.2. 4.3. 4.4.

5. а) Нека је a страница веће коцке, а $\frac{a}{2}$ странца мање. Изделимо обе коцке на n^3 (n је неки велик број) мањих коцки **(3п)** страница $\frac{a}{n}$ за већу и $\frac{a}{2n}$. Пошто је n велик онда можемо ове мале коцке посматрати као материјалне честице наелектрисања $\Delta q = \rho(\frac{a}{n})^3$ (1п) за већу и $\Delta q' = \rho(\frac{a}{2n})^3$ **(1п)** за мању, где је ρ запреминска густина коцки. Потенцијал у темену веће коцке је једнак алгебарској суми свих доприноса од ситних коцкица, тј. $\varphi = \sum k\frac{\Delta q}{r} = \sum k\frac{\rho(\frac{a}{n})^3}{r}$ **(1п)**, где је r растојање једне ситне коцке од темена (дакле r није константа него се мења за сваког члана суме). Аналогно је $\varphi' = \sum k\frac{\rho(\frac{a}{2n})^3}{r'}$ **(1п)**. Уочимо сада да за сваки члан прве суме можемо да уочимо члан друге суме за које је $r' = \frac{r}{2}$ **(3п)** (пошто мању коцку добијамо хомотетијом веће, онда за сваки члан прве суме налазимо аналогни члан мање суме као резултат хомотетије те коцкице прве суме). Дакле, $\varphi' = \sum k\frac{\rho(\frac{a}{2n})^3}{r'} = \sum k\frac{\rho\frac{1}{8}(\frac{a}{n})^3}{\frac{r}{2}} = \frac{1}{4}\sum k\frac{\rho(\frac{a}{n})^3}{r} = \frac{\varphi}{4}$ **(2п)**.

б) Поделимо коцку са три равни које све пролазе кроз центар, а свака је паралелна једном пару пљосни коцке. Овиме смо поделили коцку на 8 коцки из дела а) **(6п)**. Дакле $\varphi_C = 8\varphi' = 2\varphi$ **(2п)**.

НАПОМЕНА: ако ученик није решио део под а), али је решио део под б) позивајући се на резултат под а), опет му треба дати 8 поена.

Члановима комисије желимо успешан рад и пријатан дан!