



III РАЗРЕД	Друштво физичара Србије	ОКРУЖНИ НИВО 18.03.2023.
	Министарство просвете Републике Србије	
	РЕШЕЊА ЗАДАТАКА - АЛФА КАТЕГОРИЈА	

1. Наелектрисање који је изнад бесконачне металне плоче индукује у плочи наелектрисање, чије је поље идентично тачкастом наелектрисању супротног знака, који се налази на огледалски пресликаном месту иза плоче (слика 1.). Тако можемо бесконачну плочу заменити са два наелектрисања, $-q_1$ и $-q_2$ [1п]. На наелектрисање q_1 осим гравитационе силе и силе одбијања од друге куглице F_{12} делују и привлачне силе од два негативна „лика“ (F_{1-1} и F_{1-2}). Пошто се куглице могу померати само вертикално, односно ротирати око ослоњаца О, услов равнотеже је да сви збирови момената које делују око тачке О буду једнаки нули. Силе F_{12} и F_{21} делују дуж штапа, тако да су им моменти нуле. Гравитациона и сила између наелектрисања и његовог лика F_{1-1} стоје нормално на крак силе и њихов момент силе се може израчунати у скаларном облику као крак пута сила. Са друге стране момент силе између остала два наелектрисања (наелектрисање и лик другог наелектрисања) F_{1-2} стоји под углом α у односу на нормалу. Њен момент се може израчунати као крак силе пута пројекција силе на нормалу, тј. множи се са $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ [1п]. Примећује се да су сви моменти једне куглице једног знака а друге супротног (односно прва куглица ротира теразије супротно а друга у правцу кретања сата) [1п], док кракови сила се разликују по односу из задатка Момент са којим наелектрисање q_1 делује на осовину је $M_1 = 2d \left(mg + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1^2}{(2d)^2} \right) + 2d \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(2d)^2 + (3d)^2}$ [3п] а друго наелектрисање $M_2 = d \left(mg + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2}{(2d)^2} \right) + d \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(2d)^2 + (3d)^2}$ [3п]. Уврштавањем услова за однос растојања и масе једначине постају: $M_1 = 2d \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1^2 + q_2^2}{4d^2} \right) + 2d \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{13d^2}$ [2п] и $M_2 = d \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1^2 + q_2^2}{4d^2} \right) + d \frac{2}{\sqrt{13}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{13d^2}$ [2п]. Из једнакости ове две једначине се добије (множи се са $4\pi\epsilon_0 \cdot d$) $\frac{10q_1^2}{4} + \frac{4q_1 q_2}{13\sqrt{13}} = \frac{4q_1^2 + q_2^2}{4} + \frac{2q_1 q_2}{13\sqrt{13}}$ што се своди на квадратну једначину $q_2^2 - \frac{8q_1}{13\sqrt{13}} q_2 - 6q_1^2 = 0$ [4п], чије је решење $q_2 = 29,72 \text{ C}$ [1п]. Ова једначина има и негативно решење за које обично кажемо да нема физичког смисла- оно износи $q_2 = -27,72 \text{ C}$ [1п]. У овом случају би наелектрисање q_2 било негативно, али у једначинама би се променили смерови сила (предзнаци) које делују између два наелектрисања и првог наелектрисања и другог лика (пошто би сад то наелектрисање било позитивно). То значи да и ово решење има стварни физички смисао, једино се коси са основном претпоставком задатка, да су наелектрисања позитивна [1п].

2.

I начин) Импеданса гране са калемом износи $\bar{Z}_1 = R + j\omega L$ [2п], а гране са кондензатором је $\bar{Z}_2 = R - j\frac{1}{\omega C}$ [2п].

Укупна импеданса кола износи, $\bar{Z}_u = R + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2}$ [1п], односно, $\bar{Z}_u = R + \frac{(R + j\omega L) \left(R - j\frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}$ [3п]. Јачина струје

кроз извор ће бити минимална када је имагинарни део имениоца израза једнак нули, односно када је $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100 \text{ s}^{-1}$ [1+1п], што је и услов за струјну резонанцију. У том случају важи да је укупна

импеданса кола једнака $\bar{Z}_u = \frac{3R^2 + \frac{L}{C}}{2R} = 500001,5 \Omega$ [2п]. Ефективна вредност јачине струје кроз извор је

једнака $i = \frac{U}{Z_u} = \frac{2R}{3R^2 + \frac{L}{C}} U = 0,199 \text{ mA}$ [2п]. Имајући у виду да је испуњен услов струјне резонанције, јачина

струје кроз извор је у фази са напонам извора, па је укупан напон на паралелној вези грана једнак је $U - Ri$. Тада је ефективна вредност јачине струје у грани са кондензатором једнака $i_C = (U - Ri) / Z_2$ [2п]. Однос



јачина струја је
$$i_c = \frac{U - Ri}{Z_2} = \frac{U - R}{Z_2} = \frac{3R^2 + \frac{L}{C} - R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C}}{2R\sqrt{R^2 + \frac{L}{C}}} = 500 \text{ [3+1п].}$$

II начин) Фазорски дијаграм за грану у којој се налази калем приказан је на слици а) [2п], где је U_L ефективна вредност напона на калему, а U_{RLR} ефективна вредност напона на отпорнику те гране, док је U_P ефективна вредност напона паралелне везе. i_L је ефективна вредност струје кроз ту грану. Важи да је $\tan \phi_{LR} = \frac{\omega L}{R}$ [1п] и $U_p = i_L \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ [1п]. Фазорски дијаграм за други грану у којој је кондензатор приказан је на слици б) [2п], где су U_C ефективна вредност напона на кондензатору, а U_{RCR} ефективна вредност напона на отпорнику у грани са кондензатором. i_C је ефективна вредност струје кроз грану. За тај дијаграм важи $\tan \phi_{CR} = \frac{1}{\omega CR}$ [1п] и $U_p = i_C \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$ [1п]. С обзиром да гране имају једнаке напоне, U_p , када објединимо дијаграме добија се дијаграм као на слици в) [3п]. На дијаграму је представљено да је резултујућа струја која пролази кроз извор, ефективне вредности i , једнака збиру фазора струја које протичу кроз гране, i_C и i_L [1п]. Да би струја била у фази са напонем извора, неопходно је да буде и у фази са напонем паралелне везе, односно да је $\tan \phi_P = 0$ [1п]. У том случају, струја и се поклапа са напонем U_p . Са дијаграма се може закључити да је

$$\tan \phi_p = \frac{i_y}{i_x} = \frac{i_L \sin \phi_{LR} - i_C \sin \phi_{CR}}{i_L \cos \phi_{LR} + i_C \cos \phi_{CR}} = 0 \text{ [1п].} \quad i_L \frac{\frac{\omega L}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}} = i_C \frac{\frac{1}{\omega CR}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} \text{ [2п].}$$

Ова једнакост ће важити када је

$\frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR}$, односно $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ [2п], што представља услов струјне резонанције, а истовремено ће тиме бити и испуњен услов да је $i_L = i_C$. Како су тада напон и јачина струје колинеарни, са дијаграма се види да је

$$i = i_C \cos \phi_{CR} + i_L \cos \phi_{LR} = 2i_C \cos \phi_{CR}, \text{ одакле се добија да је } \frac{i_C}{i} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}}{2} \approx 500 \text{ [1+1п].}$$

3. На наелектрисане куглице делују силе електричног поља, односно спрег сила $\vec{F} = q\vec{E}$ [2п]. Момент силе електричног поља, који делује на дате честице једнак је $\vec{M}_q = \vec{l} \times \vec{F}$ [2п]. Поред сила електричног поља, јавља се и момент силе услед истезања, тј. сабијања опруге $\vec{M}_{el} = \vec{l} \times \vec{F}_{el}$ [2п], где је $F_{el} = kl \tan \theta$ [2п]. Једначина ротационог кретања има облик $I\ddot{\alpha} = \vec{M}_q + \vec{M}_{el}$, односно у скаларном облику $I\alpha = -qEl \sin \theta - kl \tan \theta$ [3п], где је θ угао који закрпа вектор \vec{l} и \vec{F} . Момент инерције два тела, масе m , на међусобном растојању l , износи $I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}$ [2п]. Претходни израз се може написати у форми $m\frac{l^2}{2}\ddot{\theta} = -qEl \sin \theta - kl \tan \theta$. За мале

осцилације $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ [1п], одакле следи да је $\ddot{\theta} + \frac{2(qE+k)}{ml}\theta = 0$ [3п]. Из релације се види да је кружна

фреквенција осцилација једнака $\omega = \sqrt{\frac{2(qE+k)}{ml}} = \sqrt{\frac{2(q\sigma/\epsilon_0+k)}{ml}}$ [1п], односно, да је период малих осцилација

$$T = 2\pi / \sqrt{\frac{2(q\sigma/\epsilon_0+k)}{ml}} \text{ [2п].}$$

4. При ротацији штапа са угао $\Delta\phi$, промена површи контуре која садржи извор износи $\Delta S = (a+l)^2 \frac{\Delta\phi}{2} - a^2 \frac{\Delta\phi}{2}$ [5п]. При томе се променити флуks магнетног поља за $\Delta\Phi = B\Delta S = B\left((a+l)^2 \frac{\Delta\phi}{2} - a^2 \frac{\Delta\phi}{2}\right)$

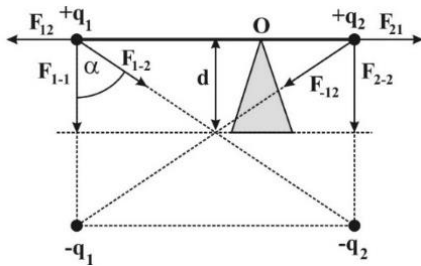
[2п]. Услед промене магнетног флуksа на штапу се индукује емс $\epsilon_{ind} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\Delta S}{\Delta t} = B(a+l)^2 \frac{\omega}{2} - Ba^2 \frac{\omega}{2} = B(2al+l^2) \frac{\omega}{2}$ [3п], где $\omega = \Delta\phi/\Delta t$ [1п] угаона брзина ротације штапа. Јачина

струје која протиче кроз проводник износи $I = \frac{\epsilon + \epsilon_{ind}}{R+r} = \frac{2\epsilon + B(2al+l^2)\omega}{2(R+r)}$ [4п], па је напон на крајевима штапа

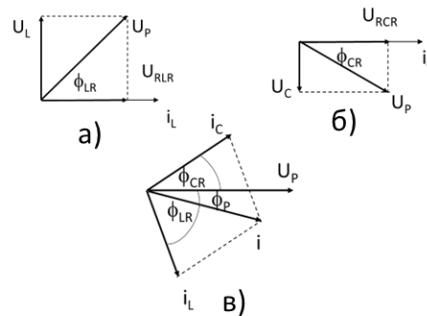
$$\text{једнак } U = \epsilon - rI = \frac{2\epsilon R - Br(2al+l^2)\omega}{2(R+r)} \text{ [5п].}$$



5. Јачина струје која протиче кроз коло има исту фреквенцију као и извори и може се написати у форми $i(t) = i_0 \cos(2\pi f + \phi_0)$ [4п]. Резултујућа емс ће имати форму $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(2\pi f + \theta) = \varepsilon_0 \cos\left(2\pi f + \phi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$ [4п], јер струја која протиче кроз кондензатор, предњачи у односу на напон кондензатора за $\pi/2$, па је почетна фаза резултујуће емс једнака $\theta = \phi_0 - \pi/2 = 0,173 \text{ rad}$ [1п]. Однос амплитуда јачине струје и емс је $i_0 = \varepsilon_0 \omega C$ [1п]. Замењујући бројне вредности, добија се да амплитуда резултујуће емс износи $\varepsilon_0 = 2,9 \text{ V}$. Да би нашли амплитуду емс првог извора и почетну фазу другог извора, применићемо фазорски дијаграм, где компоненте емс на осе износе $\varepsilon_x = \varepsilon_{10} \cos \phi_1 + \varepsilon_{20} \cos \phi_2$ [2п] и $\varepsilon_y = \varepsilon_{10} \sin \phi_1 + \varepsilon_{20} \sin \phi_2$ [2п], одакле следи да се почетна фаза и амплитуда резултујуће емс одређује на основу система једначина $\tan \theta = \varepsilon_y / \varepsilon_x$ [2п] и $\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}$ [2п]. Замењујући бројне вредности и решавајући систем једначина добија се да је амплитуда емс првог извора једнака $\varepsilon_{10} = 2 \text{ V}$ [1п], а почена фаза емс другог извора $\phi_2 = \frac{\pi}{6}$ [1п].



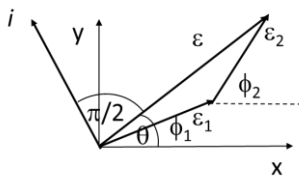
Слика уз задатак 1



Слика уз задатак 2



Слика уз задатак 3



Слика уз задатак 5

Сва тачна решења која се разликују од кључа признати!

Члановима комисије желимо успешан рад и пријатан дан!