



II разред

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА – АЛФА КАТЕГОРИЈА

Параћин
09-10. мај 2026.

1. **Корак i** Укупна запремина бакарне кугле на почетној температури износи $V = \frac{4}{3}R_0^3\pi$. Средње растојање између атома бакра налазимо као $N\bar{r}^3 = V$, односно $\bar{r} = \sqrt[3]{\frac{4R_0^3\pi}{3N}} = 2,34 \cdot 10^{-10}$ m. **Корак ii** Услед термалног ширења, на температури топљења ово растојање постаје $\bar{r}_{T_t} = \sqrt[3]{\frac{4R_0^3\pi}{3N}(1 + \alpha(T_t - T))} = 2,35 \cdot 10^{-10}$ m, док укупну запремину налазимо као $V' = \frac{4}{3}\pi(R_0(1 + \alpha(T_t - T)))^3 \approx \frac{4}{3}\pi(R_0^3(1 + 3\alpha(T_t - T)))$. Промена запремине износи $\Delta V = V' - V \approx 3V\alpha(T_t - T) = 6,8$ mm³. **Корак iii** Топлоту потребну да се ова количина бакра истопа налазимо као $Q = \lambda m = \lambda N m_{Cu} = 884,5$ J. **Корак iv** Полупречник капљице пре поделе налазимо из $\frac{4}{3}\pi R_1^3 = m/\rho$. Услед поделе капи на два дела, укупна запремина се одржава, те имамо релацију $R_1^3 = 2R_2^3$. Енергија услед површинског напона је дата као $W = 4\pi R^2\gamma$, те је промена ове енергије дата као $4\pi\gamma(2R_2^2 - R_1^2)$. Тражена промена енергије стога износи $|\Delta W| = 4\pi\gamma \left(2 \left(\frac{R_1}{\sqrt[3]{2}} \right)^2 - R_1^2 \right) = 0,1$ mJ.

корак i: средње растојање између атома бакра	4п
корак ii: топлотно ширење	5п
корак iii: топлота топљења	4п
корак iv: промена енергије услед површинског напона	7п

Таблица 1: схема за бодовање по корацима уз задатак 1.

2. **Корак i** Коefицијент дифузије молекула M кроз гас Γ_1 је $D_1 = \frac{1}{3}v_s\bar{\lambda}_1$, где је $v_s \sim \sqrt{k_B T/M}$ при чему је T температура гаса Γ_1 . Другим речима, за један те исти молекул и фиксирану температуру, имамо $v_s = \text{const} \equiv C$ па следи да за први гас важи $D_1 = \frac{C}{n\sigma_1}$ и слично за други гас $D_2 = \frac{C}{n\sigma_2}$. За смесу гасова, онда, мора бити $D = \frac{C}{n_{12}\sigma_{12}}$ где је $n_{12} = n_1 + n_2$ а σ_{12} је ефикасни попречни пресек за смесу гасова. Број судара који трпи молекул M у јединици времена у смеси је $Z_M = n_{12}\sigma_{12}v_s = (n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2)v_s$. **Корак ii** Тако се може писати $D = \frac{C}{n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2}$ одакле следи да је $D = \frac{nD_1D_2}{n_1D_2 + n_2D_1}$ након смене израза за D_1 и D_2 .

корак i: број судара у јединици времена у смеси	15п
корак ii: крајњи израз	5п

Таблица 2: схема за бодовање по корацима уз задатак 2.

3. **Корак i** Приликом једног циклуса пумпања, у балон уђе $p_0V/(\mathcal{R}T)$ молова ваздуха, где је \mathcal{R} универзална гасна константа. Како је температура све време константа, за ваздух у балону важи $p\frac{4}{3}R^3\pi = n\mathcal{R}T$. Како је на почетку балон моделован сфером полупречника R_0 , у почетном тренутку се у истом налази $n_0 = p_0\frac{4}{3}R_0^3\pi/(\mathcal{R}T)$ молова ваздуха. Након k циклуса пумпања, укупан број молова ваздуха унутар балона износи $n = p_0\frac{4}{3}R_0^3\pi/(\mathcal{R}T) + kp_0V/(\mathcal{R}T)$. Из формуле дате у задатку закључујемо да је притисак ваздуха дат као $p = p_0 + K \left(\frac{R_0}{R_f} - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^7 \right) \left(1 + 0,1 \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^2 \right)$, те комбиновањем претходних формула долазимо до $k = \frac{4\pi}{3V} \left(R_f^3 - R_0^3 + R_f^3 \frac{K}{p_0} \left(\frac{R_0}{R_f} - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^7 \right) \left(1 + 0,1 \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^2 \right) \right)$. **Корак ii** Како се густина гуме приликом ширења очувава, а маса је такође константа, њена запремина остаје непромењена. Како је гума танка, запремина јој је $4\pi R^2H$, где је $H \ll R$ дебљина гуме. Нормални напон можемо пронаћи на два начина.

Решење 1: По аналогији са површинским напонам, разлику притиска напишимо сугестивно у облику $p = p_0 + \frac{4\gamma}{R_f}$, где је $\gamma = \frac{R_f K}{4} \left(\frac{R_0}{R_f} - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^7 \right) \left(1 + 0,1 \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^2 \right)$. Ако изолујемо неку контуру на површини балона обима ℓ , укупна сила којом се та контура развлачи биће једнака $2\gamma\ell$, те је нормални напон једнак $\sigma = 2\gamma\ell/(\ell H)$. Имамо $4\pi R_f^2 H = 4\pi R_0^2 H_0$, те коначно за нормални напон добијамо $\sigma = \frac{R_f^3 K}{2R_0^2 H_0} \left(\frac{R_0}{R_f} - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^7 \right) \left(1 + 0,1 \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^2 \right)$.

Решење 2: Ако посматрамо једну хемисферу балона, услов равнотеже исте гласи $(p - p_0)R_f^2\pi = 2R_f\pi H\sigma$ (површина $R_f^2\pi$ представља пројекцију укупне површине хемисфере и ова величина нам је од интереса пошто се одређене компоненте силе притиска скраћују). Како је $4\pi R_f^2 H = 4\pi R_0^2 H_0$, за нормални напон добијамо $\sigma(R_f) = \frac{R_f^3 K}{2R_0^2 H_0} \left(\frac{R_0}{R_f} - \left(\frac{R_0}{R_f} \right)^7 \right) \left(1 + 0,1 \left(\frac{R_f}{R_0} \right)^2 \right)$.



корак <i>i</i> : израз за k	9п
корак <i>ii</i> : израз за нормални напон у гуми $\sigma(R_f)$	11п

Таблица 3: схема за бодовање по корацима уз задатак 3.

4. **Корак *i*** По услову задатка, процес кроз који гас пролази је адијабатски. Како је у питању двоатомски гас, коефицијент адијабате гаса износи $\gamma = \frac{7}{5}$ и важи $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma$, где је $V_1 = SH$ а $V = V_1 + Sut$. Како је брзина клипа константна, убрзање му је нулто, те су силе све време уравнотежене. Ако са α означимо тренутни угао између канапа и вертикале у додирној тачки са клипом, а са T силу затезања канапа (из услова идеалности котура и безмасености канапа, то је уједно и сила $F(t)$ којом Петар вуче канап) имамо $T \cos \alpha + pS = mg + p_0S$. Из геометрије проблема следи $\cos \alpha = \frac{L-H-ut}{\sqrt{a^2+(L-H-ut)^2}}$, те комбинацијом претходних једначина имамо $T = F(t) = \frac{\sqrt{a^2+(L-H-ut)^2}}{L-H-ut} \left(mg + p_0S - p_1S \frac{H^{\frac{7}{5}}}{(H+ut)^{\frac{7}{5}}} \right)$. **Корак *ii*** Из услова неистегљивости канапа имамо $u \cos \alpha = v(t)$, те је брзина којом Петар повлачи канап једнака $v(t) = \frac{u(L-H-ut)}{\sqrt{a^2+(L-H-ut)^2}}$. Снага коју Петар развија је коначно дата као $P(t) = F(t)v(t) = u \left(mg + p_0S - p_1S \frac{H^{\frac{7}{5}}}{(H+ut)^{\frac{7}{5}}} \right)$. **Корак *iii*** Уколико је топлотни капацитет посуде и клипа огроман, из $Q = C\Delta T$ закључујемо да је промена температуре веома мала, односно да се ради о изотермском процесу. Стога је $pV = p_1V_1$, те крајње решење за снагу постаје $P'(t) = u \left(mg + p_0S - p_1S \frac{H}{(H+ut)} \right)$.

корак <i>i</i> : израз за $F(t)$	10п
корак <i>ii</i> : изрази за $v(t)$ и $P(t)$	6п
корак <i>iii</i> : разматрање изотермског процеса	4п

Таблица 4: схема за бодовање по корацима уз задатак 4.

5. **Корак *i*** Хидростатички притисак воде на дубини h је дат као $p = p_0 + \rho gh$, где је p_0 атмосферски притисак. Ако са p_1 означимо спољашњи притисак у тренутку $t = 0$, имамо $p(t) = p_1 + \rho g\Delta z$, где је Δz вертикално растојање које подморница пређе за време t . Стога, имамо $\Delta z = v \cos \theta t$, где угао θ одговара углу α , а касније углу β из задатка (тачније, у каснијим тренуцима, p_1 неће одговарати притиску за $t = 0$, али нас у задатку интересује само коефицијент правца са графика). **Корак *ii*** На основу датих података, цртамо график на слици. Коефицијент правца датих графика је $k_1 = \rho gv \cos \alpha$ и $k_2 = \rho gv \cos \beta$. График уз задатак дат је на слици 1. **Корак *iii*** Очитавајући координате неексперименталних тачака између прве две и последње две експерименталне тачке на оба графика (тачке $A(4 \text{ min}; 64 \cdot 10^5 \text{ Pa})$, $B(10,6 \text{ min}; 166 \cdot 10^5 \text{ Pa})$, $C(16,4 \text{ min}; 240 \cdot 10^5 \text{ Pa})$ и $D(22,6 \text{ min}; 300 \cdot 10^5 \text{ Pa})$), долазимо до вредности $k_1 = 15,6 \cdot 10^5 \text{ Pa/min}$ и $k_2 = 9,7 \cdot 10^5 \text{ Pa/min}$. Претварајући минуте у секунде, долазимо до $k_1 = 2,6 \cdot 10^4 \text{ Pa/s}$ и $k_2 = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Pa/s}$. Стога имамо $\cos \alpha = 0,53 \Rightarrow \alpha = 58^\circ$ и $\cos \beta = 0,327 \Rightarrow \beta = 71^\circ$. Тренутак промене правца брзине налазимо из пресечне тачке два линеарна графика (заокружени пресек на слици), што очитавамо да се десило у тренутку $t = 13,5 \text{ min} \approx 13 \text{ min } 30 \text{ s}$.

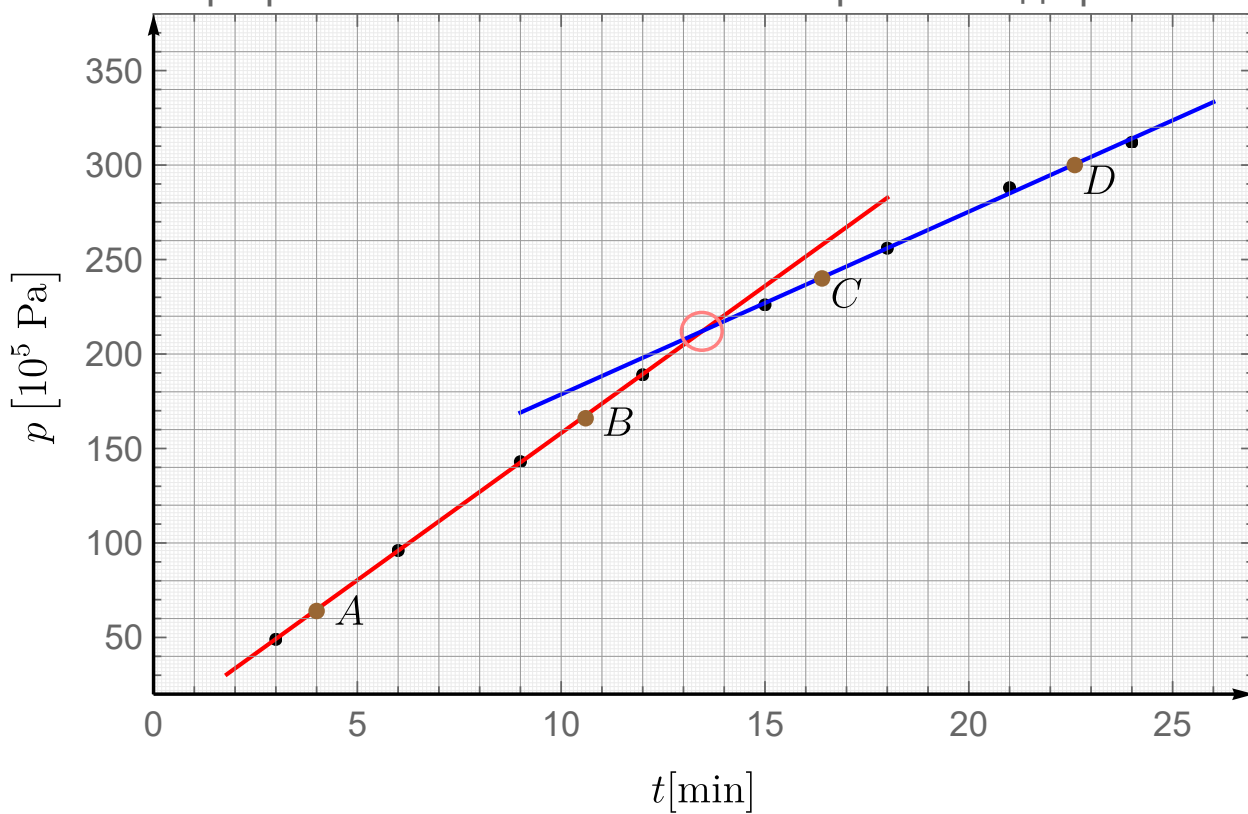
корак <i>i</i> : теоријска анализа	3п
корак <i>ii</i> : график	8п
корак <i>iii</i> : обрада података	9п

Таблица 5: схема за бодовање по корацима уз задатак 5.

Напомена: поени у табели одговарају максималном броју поена на одговарајућем кораку. Кораци су названи тако да сугеришу на који део задатка се односе, али се поени додељују за целокупну материју из решења у одговарајућем кораку.



График зависности спољашњег притиска од времена



Слика 1: график уз решење задатка 5.