**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**
**ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА**

**Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије**

**ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА**

# II разред

**ОПШТИНСКИ НИВО**
**20.01.2019.**

1. Посматрајмо идеалан гас водоника $H_2$ и идеалан гас његовог изотопа $D_2$, оба на собној температури и атмосферском притиску. Како су електронске конфигурације молекула водоника и деутеријума идентичне можемо сматрати да се димензије ових молекула не разликују. При датим условима, одредити који гас ће имати већи коефицијент дифузије и колико пута. (20 поена)

2. Дуги вертикални цилиндрични суд испуњен је идеалним гасом неона који је затворен одозго клипом масе $m$. На дну суда налази се грејач константне снаге $P$ која се троши на загревање неона без губитака. Након укључења грејача клип почне полако да се пење константном брзином. Колико времена ће му требати да се премести навише за висину $\Delta h$ током свог равномерног кретања? Атмосферски притисак и трење могу се занемарити. Клип и зидови суда су идеални топлотни изолатори без топлотног капацитета. Земљино гравитационо убрзање је $g$. (20 поена)

3. Гасна турбина је мотор који се користи између осталог у ракетама и у већини млазних авиона, а чији се рад може солидно представити Брајтоновим циклусом, са две адијабате и две изобаре (слика 1). Један циклус се састоји из: адијабатског сабијања ваздуха по усисавању у компресор ($1 \rightarrow 2$), сагоревања горива, што шири ваздух у компресору на константном притиску ($2 \rightarrow 3$), затим адијабатског ширења ваздуха ($3 \rightarrow 4$) у даљем проласку кроз турбину и изобарског сабијања ваздуха ($4 \rightarrow 1$) пре изласка из турбине, при чему извршени рад покреће вучну турбину. Експонент адијабате ваздуха као идеалног гаса је $\gamma = 7/5$. Реалне топлотне губитке услед трења, непотпуне изолације и лимитиране топлотне проводности, занемарити у потпуности.

   (а) Ако се процеси ($2 \rightarrow 3$) и ($4 \rightarrow 1$) одвијају на притисцима $p_2$ и $p_1$, одредити коефицијент корисног дејства.

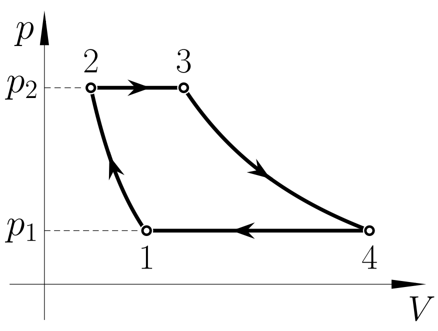
   (б) За авионски мотор АЛ-31Ф однос притисака $p_2/p_1$ је око 23. Проценити масу горива која се потроши за сат времена лета двомоторног авиона константне брзине $v = 1000$ km/h, ако један мотор развија вучну силу од $F = 74.5$ kN, а килограм горива сагоревањем ослобађа топлоту од $q = 18$ MJ.

   (в) У којим деловима циклуса се топлота прима, а у којима се отпушта од стране ваздуха? У којим деловима се ваздух хлади, а у којима се греје?

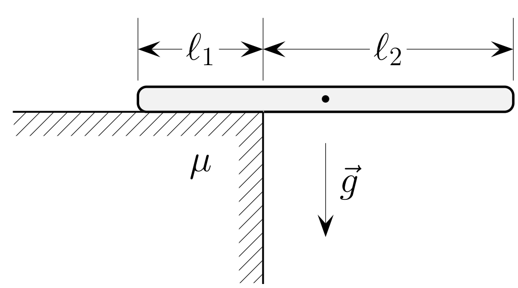
   (20 поена)

4. Израчунати средњу квадратну угаону брзину $\overline{\omega}$ молекула идеалног гаса водоника на температури $T = 6586$ K ако се зна да растојање између два тачкаста протона у молекулу износи $d = 0.074$ nm. Молекул $H_2$ посматрати као круто тело. За универзалну гасну константу узети $R = 8.314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$. (20 поена)

5. Танак хомогени штап се држи водоравно тако да се један његов део налази на храпавом столу. Видети слику 2. Однос слободног и дела штапа који лежи на столу је $\ell_2 : \ell_1 = 2 : 1$. У једном тренутку штап се пусти да слободно ротира у пољу Земљине теже око ивице стола која је нормална на раван цртежа. Одредити коефицијент трења клизања између стола и штапа, $\mu$, ако је познато да је угао који штап заклапа са хоризонталом у тренутку проклизавања са ивице једнак 30°. (20 поена)




Слика 1




Слика 2

Задатке припремили: ***Др Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
***Александар Буква***, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

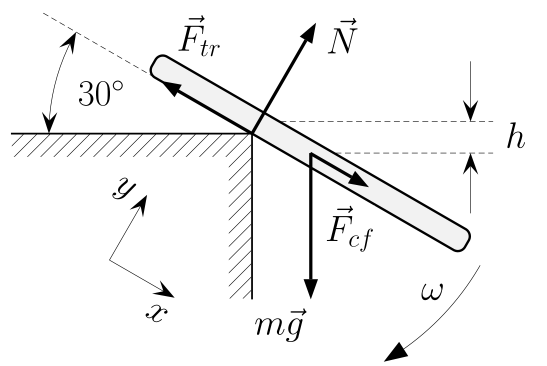
1. Гасови се налазе на истом притиску ($p$) и температури ($T$), те су им концентрације $n$ исте, јер је $p = nk_BT$ ($k_B$ Болцманова константа) $\boxed{\textbf{3 п}}$. Коефицијент дифузије идеалног гаса се записује као $D = \frac{1}{3}\bar{\lambda}v_s$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је $\bar{\lambda}$ средњи слободни пут молекула, а $v_s$ средња аритметичка брзина. Средњи слободни пут молекула ефикасног пресека судара $\sigma$ у гасу концентрације $n$ износи $\bar{\lambda} = \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Средња аритметичка брзина гаса је $v_s = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$, где је $m$ маса молекула $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како су ефикасни пресеци судара молекула исти због димензија видимо да је $D \sim v_s \sim 1/\sqrt{m}$ $\boxed{\textbf{4 п}}$, тако да молекул гаса веће масе има мањи коефицијент дифузије. У нашем случају то значи $D_{H_2} > D_{D_2}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, док је $D_{H_2} : D_{D_2} = \sqrt{2} : 1$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.
**Напомена:** дати исти број поена ако је такмичар користио формуле са моларном масом уместо масе молекула.

2. Током пењања клипа грејач преда гасу укупну количину топлоту $P\Delta t$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, која се по I закону термодинамике распоређује на промену унутрашње енергије и вршење рада при изобарском ширење гаса ($p \propto mg = const$): $P\Delta t = 3n_mR\Delta T/2 + p\Delta V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је $n_m$ број молова неона, а $R$ универзална гасна константа (искористили смо да је неон једноатомски гас, па је $c_V = 3R/2$). Са друге стране, једначине стања за $(T,V)$ и $(T + \Delta T, V + \Delta V)$ дају: $pV = n_mRT$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $pV + p\Delta V = n_mRT + n_mR\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, тј. $p\Delta V = n_mR\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Одатле можемо заменити у прву једначину и добити $P\Delta t = 5p\Delta V/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто се клип пење полако и без убрзања, сав рад који врши гас иде на пораст потенцијалне енергије клипа, отуда $p\Delta V = mg\Delta h$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Заменом у претходну једначину имамо најзад $\Delta t = 5mg\Delta h/2P$ $\boxed{\textbf{4 п}}$.

3. 
   - Коефицијент корисног дејства је по дефиницији једнак $\eta = A/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је $Q_{23}$ количина топлоте која се ваздуху преда и то на делу $2 \to 3$, а $A$ извршен рад на једном циклусу $\boxed{\textbf{1 п}}$. Рад рачунамо као разлику примљене ($Q_{23}$) и отпуштене количине топлоте ($Q_{41}$ на процесу $4 \to 1$): $A = Q_{23} - Q_{41}$, па је $\eta = 1 - Q_{41}/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Пошто су процеси $2 \to 3$ и $4 \to 1$ изобарски, важи да је $Q_{23} = n_mc_p(T_3 - T_2)$ и $Q_{41} = n_mc_p(T_4 - T_1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, дакле $\eta = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. За адијабате $1 \to 2$ и $3 \to 4$ важи $p_1^{(1-\gamma)/\gamma}T_1 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma}T_2$ и $p_1^{(1-\gamma)/\gamma}T_4 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma}T_3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, па је $\eta = 1 - (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1 - (p_1/p_2)^{2/7}$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Означили смо моларни изобарски топлотни капацитет са $c_p$, а број молова ваздуха са $n_m$.
   - При брзини $v$ и вучној сили $F$ у току времена $t$ два мотора развију рад једнак $A = 2Fvt$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, а са друге стране за то је потребно $m$ масе горива која загрева ваздух изобарски, па је $Q_{23} = mq$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Дакле, $m = 2Fvt/\eta q$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, односно $m \approx 13990$ kg $\boxed{\textbf{1 п}}$.
   - Ваздух прима топлоту на делу $2 \to 3$, а одаје на делу $4 \to 1$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. На деловима $3 \to 4 \to 1$ гас се хлади, а на деловима $1 \to 2 \to 3$ се греје $\boxed{\textbf{2 п}}$.

4. На датој температури $H_2$ молекул ротира око свог центра масе (средишта), јер су централне силе које изазивају ротацију протона једнаке по III Њутновом закону, па су због једнаких маса једнаки и полупречници кружних путања протона ($m\omega^2r_1 = m\omega^2r_2$). Укупан момент инерције за осу $x$, која је нормална на осу везе $z$, је $I_{xx} = 2m(d/2)^2$, где је $m$ маса протона $\boxed{\textbf{6 п}}$. Такође, постоји и ротација молекула око друге осе $y$ која пролази кроз центар масе и ортогонална је на $x$ и $z$, тј. $I_{yy} = 2m(d/2)^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. На основу закона о једнакој расподели средње енергије $k_BT/2$ по сваком степену слободе ($k_B$ Болцманова константа) добија се да је $I_{xx}\overline{\omega}_x^2/2 + I_{yy}\overline{\omega}_y^2/2 = 2 \times k_BT/2$ $\boxed{\textbf{8 п}}$. Како је $\overline{\omega}_x^2 + \overline{\omega}_y^2 = \overline{\omega}^2$ следи да је $\overline{\omega} = \sqrt{\frac{4k_BT}{md^2}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{RT}{M}}$, где је $M$ моларна маса атома H $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након замене долази се до $\overline{\omega} = 2 \times 10^{14}$ rad/s $\boxed{\textbf{1 п}}$.
**Напомена:** дати исти број поена ако је такмичар користио формулу за унутрашњу енергију $U(T) = 5/2n_mRT$ идеалног двоатомског гаса моларне масе $n_m$ на температури $T$ од које је одузео унутрашњу енергију $U(T) = 3/2n_mRT$ идеалног једноатомског гаса исте моларне масе и температуре. Разлика $n_mRT$ управо одговара ротационом доприносу унутрашњој енергији двоатомског гаса.

5. На слици 1 је представљен тренутак када штап почиње да проклизава. Нека је угаона брзина штапа у том тренутку $\omega$. Силе које делују на штап су: $mg$ сила Земљине теже која делује из средишта на растојању $(\ell_2 - \ell_1)/2$ од ивице, сила нормалне реакције ивице стола $N$, сила трења $F_{tr}$ која је у тренутку проклизавња максимална и једнака сили трења клизања $F_{tr} = \mu N$, и центрифугална сила у ротирајућем систему $F_{cf} = m\omega^2((\ell_2 - \ell_1)/2)$ делујући на центар масе $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто је $\ell_1 + \ell_2 = \ell$, где је $\ell$ дужина штапа, онда је $(\ell_2 - \ell_1)/2 = \ell/6$, па се центар масе штапа спустио за $h = \ell/12$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. По Штајнеровој теореми момент инерције штапа око осе која пролази кроз ивицу стола је $I = m\ell^2/12 + m(\ell/6)^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Према закону одржања енергије, целокупна потенцијална енергија штапа $mgh$ се претвори у његову кинетичку $I\omega^2/2$, па је $\omega^2\ell = 3g/2$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како непосредно пре проклизавања нема кретања дуж $x$-осе онда је $F_{tr} = mg/2 + F_{cf}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Дуж $y$-осе центар масе штапа има тренутно убрзање $a$ у смеру ротације око ивице, па је по II Њутновом закону $ma = mg\sqrt{3}/2 - N$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Ако је тренутно угаоно убрзање штапа око ивице стола $\alpha$, где је $a = \alpha\ell/6$, онда важи да је $I\alpha = mg\sqrt{3}/2 \times \ell/6$ (резултујући тренутни момент сила око ивице стола) $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након краћих трансформација и елиминација се добија да је $\mu\sqrt{3} = 2$, те је $\mu = 2\sqrt{3}/3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.




Слика 1

Задатке припремили: ***Александар Буква***, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
***Др Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

**ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА**
**ШКОЛСКА 2018/19. ГОДИНА**

**Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије**

**II разред** — **ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** — **ОПШТИНСКИ НИВО** **20.01.2019.**

1. Непомични вертикални цилиндрични суд заробљава $n_m = 1\ \mu$mol идеалног гаса и налази се у гравитационом пољу Земље убрзања $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$. Дно суда попуњава уметнута дигитална вага која херметички затвара гас у суду одоздо тако да честице гаса не дифундују испод горње статичне површине ваге осетљиве на притисак, а у сврху мерења масе. Видети слику 1. Осетљива површ ваге је у савршеном механичком и термодинамичком контакту са гасом. Висина гаса мерена од ове површине па све до врха суда износи $h = 166.28$ cm. У почетном тренутку гас се налази на температури $t_1 = 21\ ^\circ$C. Гас се затим загреје до температуре $t_2 = 40.62\ ^\circ$C, те се маса коју вага очитава промени за $\Delta m$. Одредити ову промену масе коју вага очитава уколико нема никаквог механичког контакта између осетљиве површине ваге и зидова суда. За гасну константу узети $R = 8.314\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}$. (20 поена)

2. Дуги вертикални цилиндрични суд испуњен је идеалним гасом неона који је затворен одозго клипом масе $m$. На дну суда налази се грејач константне снаге $P$ која се троши на загревање неона без губитака. Након укључења грејача клип почне полако да се пење константном брзином. Колико времена ће му требати да се премести навише за висину $\Delta h$ током свог равномерног кретања? Атмосферски притисак и трење могу се занемарити. Клип и зидови суда су идеални топлотни изолатори без топлотног капацитета. Земљино гравитационо убрзање је $g$. (20 поена)

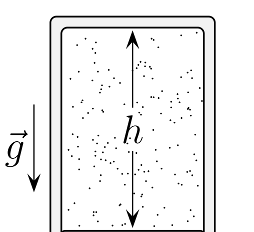
3. Гасна турбина је мотор који се користи између осталог у ракетама и у већини млазних авиона, а чији се рад може солидно представити Брајтоновим циклусом, са две адијабате и две изобаре (слика 2). Један циклус се састоји из: адијабатског сабијања ваздуха по усисавању у компресор ($1 \to 2$), сагоревања горива, што шири ваздух у компресору на константном притиску ($2 \to 3$), затим адијабатског ширења ваздуха ($3 \to 4$) у даљем проласку кроз турбину и изобарског сабијања ваздуха ($4 \to 1$) пре изласка из турбине, при чему извршени рад покреће вучну турбину. Експонент адијабате ваздуха као идеалног гаса је $\gamma = 7/5$. Реалне топлотне губитке услед трења, непотпуне изолације и лимитиране топлотне проводности, занемарити у потпуности.

   (а) Ако се процеси ($2 \to 3$) и ($4 \to 1$) одвијају на притисцима $p_2$ и $p_1$, одредити коефицијент корисног дејства.
   (б) За авионски мотор АЛ-31Ф однос притисака $p_2/p_1$ је око 23. Проценити масу горива која се потроши за сат времена лета двомоторног авиона константне брзине $v = 1000$ km/h, ако један мотор развија вучну силу од $F = 74.5$ kN, а килограм горива сагоревањем ослобађа топлоту од $q = 18$ MJ.
   (в) Наћи максимални могући рад по циклусу у функцији моларне масе ваздуха, $n_m$, универзалне гасне константе, $R$, и температура $T_1$ и $T_3$, тј. јединих фиксних термодинамичких параметара гасне турбине. Прва је температура околног ваздуха (стање 1), а друга је одређена температуром сагоревања горива (стање 3).

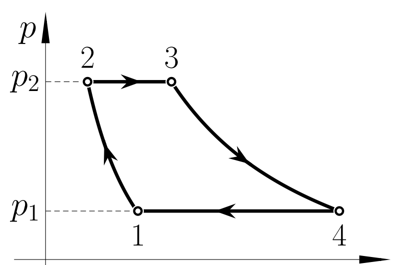
   (20 поена)

4. Изразити средњу квадратну угаону брзину $\overline{\omega}$ двоатомског молекула идеалног гаса на температури на којој је његова средња квадратна брзина $\overline{v}$ и ако се зна да је растојање између два атома у молекулу $d$. Молекул посматрати као круто тело сачињено од хетерогених тачкастих атома чије је однос маса $\chi$. За које $\chi$ ће $\overline{\omega}$ узети најмању могућу вредност и колико та вредност износи при датом $\overline{v}$ и $d$? (20 поена)

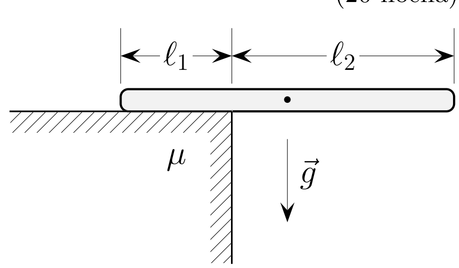
5. Танак хомогени штап се држи водоравно тако да се један његов део налази на храпавом столу. Видети слику 3. Коефицијент трења клизања између стола и штапа износи $\mu = 2\sqrt{3}/3$. Однос слободног и дела штапа који лежи на столу је $\ell_2 : \ell_1 = 2 : 1$. У једном тренутку штап се пусти да слободно ротира у пољу Земљине теже око ивице стола која је нормална на раван цртежа. Одредите угао који штап заклапа са хоризонталом у тренутку проклизавања са ивице? (20 поена)



Слика 1



Слика 2



Слика 3

Задатке припремили: ***Др Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
***Александар Буква***, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Др Божидар Николић***, Физички факултет, Београд

1. Вага је направљена тако да се на екрану очитава однос $F/g$, где је $F = pS$ сила којом гас притиска ($p$ притисак гаса) осетљиву површ ваге површине $S$. Промена масе коју вага очитава не настаје услед промене стварне масе гаса, него услед промене притиска гаса на површину ваге при изохорском загревању ($V = hS = const$) $\boxed{\textbf{8 п}}$. Из једначине стања идеалног гаса видимо да притисак линеарно зависи од температуре $T$ као $p = n_m RT/V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након загревања гаса долази до промене притиска који се региструје на површини ваге, $\Delta p = n_m R(t_2 - t_1)/V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Када промену притиска изједначимо са променом силе гаса на осетљиву површину ваге, тј. $\Delta F = \Delta pS$, долазимо до крајњег резултата $\Delta m = \Delta F/g = n_m R(t_2 - t_1)/(gh)$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Уврштавањем бројних вредности добијамо да је промена масе коју очитава вага $\Delta m = 10$ mg $\boxed{\textbf{3 п}}$.

2. Током пењања клипа грејач преда гасу укупну количину топлоту $P\Delta t$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, која се по I закону термодинамике распоређује на промену унутрашње енергије и вршење рада при изобарском ширење гаса ($p \propto mg = const$): $P\Delta t = 3n_m R\Delta T/2 + p\Delta V$ $\boxed{\textbf{3 п}}$, где је $n_m$ број молова неона, а $R$ универзална гасна константа (искористили смо да је неон једноатомски гас, па је $c_V = 3R/2$). Са друге стране, једначине стања за $(T,V)$ и $(T+\Delta T, V+\Delta V)$ дају: $pV = n_m RT$ $\boxed{\textbf{1 п}}$ и $pV + p\Delta V = n_m RT + n_m R\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, тј. $p\Delta V = n_m R\Delta T$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Одатле можемо заменити у прву једначину и добити $P\Delta t = 5p\Delta V/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто се клип пење полако и без убрзања, сав рад који врши гас иде на пораст потенцијалне енергије клипа, отуда $p\Delta V = mg\Delta h$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Заменом у претходну једначину имамо најзад $\Delta t = 5mg\Delta h/2P$ $\boxed{\textbf{4 п}}$.

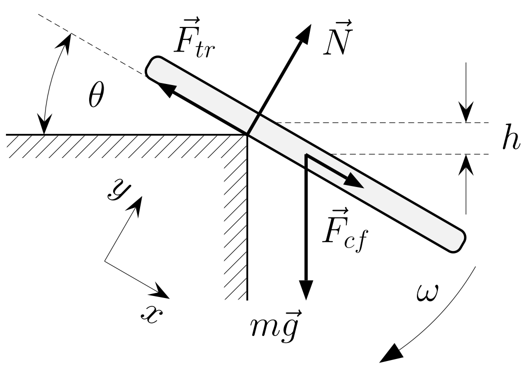
3.
   - Коефицијент корисног дејства је по дефиницији једнак $\eta = A/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, где је $Q_{23}$ количина топлоте која се ваздуху преда и то на делу $2 \to 3$, а $A$ извршен рад на једном циклусу $\boxed{\textbf{1 п}}$. Рад рачунамо као разлику примљене ($Q_{23}$) и отпуштене количине топлоте ($Q_{41}$ на процесу $4 \to 1$): $A = Q_{23} - Q_{41}$, па је $\eta = 1 - Q_{41}/Q_{23}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Пошто су процеси $2 \to 3$ и $4 \to 1$ изобарски, важи да је $Q_{23} = n_m c_p(T_3 - T_2)$ и $Q_{41} = n_m c_p(T_4 - T_1)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, дакле $\eta = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. За адијабате $1 \to 2$ и $3 \to 4$ важи $p_1^{(1-\gamma)/\gamma}T_1 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma}T_2$ и $p_1^{(1-\gamma)/\gamma}T_4 = p_2^{(1-\gamma)/\gamma}T_3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$, па је $\eta = 1 - (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1 - (p_1/p_2)^{2/7}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Означили смо моларни изобарски топлотни капацитет са $c_p$ ($c_p = 7R/2$), а број молова ваздуха са $n_m$.
   - При брзини $v$ и вучној сили $F$ у току времена $t$ два мотора развију рад једнак $A = 2Fvt$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, а са друге стране за то је потребно $m$ масе горива која загрева ваздух изобарски, па је $Q_{23} = mq$ $\boxed{\textbf{1 п}}$. Дакле, $m = 2Fvt/\eta q$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, односно $m \approx 13990$ kg $\boxed{\textbf{1 п}}$.
   - Као што смо већ нашли, рад износи $A = n_m c_p(T_3 - T_2 - (T_4 - T_1)) = n_m c_p(T_1 + T_3 - T_2 - T_4)$, па имајући у виду да је $T_4/T_3 = T_1/T_2$, налазимо $A/(n_m c_p) = T_1 + T_3 - (T_2 + T_1T_3/T_2)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Максимум овог израза кад $T_2$ варира налазимо на следећи начин. Члан $T_1 + T_3$ је константан и не зависи од $T_2$, њега дакле можемо игнорисати. Члан $T_2 + T_1T_3/T_2$ се одузима, дакле хоћемо да га минимизујемо да цео израз буде максималан. По неједнакости аритметичке и геометријске средине, збир $T_2 + T_1T_3/T_2$ (двострука аритметичка средина $T_2$ и $T_1T_3/T_2$) достиже минимум и једнак двоструком корену производа сабирака $2\sqrt{T_1T_3}$ (тј. њиховој двострукој геометријској средини), када су сабирци једнаки, тј. $T_1T_3/T_2 = T_2$. Према томе, температура која даје максимални рад је $T_2 = \sqrt{T_1T_3}$ $\boxed{\textbf{1 п}}$, те је $A = 7n_m R(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1T_3})/2 = 7n_m R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2/2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.
   **Напомена:** признати и друге начине доказивања да је $T_2 = \sqrt{T_1T_3}$ температура која одговара максимуму.

4. На извесној температури $T$ молекул ротира око свог центра масе јер су централне силе које изазивају ротацију атома једнаке по III Њутновом закону па је $m_1\omega^2 r_1 = m_2\omega^2 r_2$. Овде су $m_1$ и $m_2$, односно $r_1$ і $r_2$, редом појединачне масе атома, односно њихова растојања од центра масе $\boxed{\textbf{4 п}}$. Како је $r_1 + r_2 = d$ и $m_1/m_2 \equiv \chi$ добија се да је $r_1 = d/(1+\chi)$ и $r_2 = d\chi/(1+\chi)$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Укупан момент инерције око осе $x$, која је нормална на осу везе $z$, атома као материјалних тачака је $I_{xx} = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}d^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Такође, постоји и ротација молекула око друге осе $y$ која пролази кроз центар масе и ортогонална је на $x$ и $z$, тј. $I_{yy} = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}d^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. На основу закона о једнакој расподели средње енергије $k_BT/2$ по сваком степену слободе ($k_B$ Болцманова константа) добија се да је кинетичка енергија ротације $I_{xx}\overline{\omega}_x^2/2 + I_{yy}\overline{\omega}_y^2/2 = 2 \times k_BT/2$ $\boxed{\textbf{4 п}}$. Средња квадратна брзина молекула је $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m_1+m_2}}$, те је

тако $k_B T = (m_1+m_2)\overline{v}^2/3$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Како је $\overline{\omega}_x^2 + \overline{\omega}_y^2 = \overline{\omega}^2$ следи да је $\overline{\omega} = \frac{\overline{v}}{d}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(m_1+m_2)^2}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\chi}+\frac{1}{\sqrt{\chi}}\right)\frac{\overline{v}}{d}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.
Функција $f(\chi) = \sqrt{\chi} + \frac{1}{\sqrt{\chi}}$ досеже свој минимум у $\chi = 1$ узимајући вредност $f(1) = 2$. На тај начин, средња квадратна угаона брзина узима минималну вредност у случају истородних атома ($\chi = 1$) и износи $\overline{\omega}_{min} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{2\overline{v}}{d} = 2\overline{v}\sqrt{6}/3d$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.

**Напомена:** дати исти број поена ако је такмичар користио формулу за унутрашњу енергију $U(T) = 5/2 n_m RT$ идеалног двоатомског гаса моларне масе $n_m$ на температури $T$ од које је одузео унутрашњу енергију $U(T) = 3/2 n_m RT$ идеалног једноатомског гаса исте моларне масе и температуре. Разлика $n_m RT$ управо одговара ротационом доприносу унутрашњој енергији двоатомског гаса.

5. На слици 1 је представљен тренутак када штап почиње да проклизава. Нека је угаона брзина штапа у том тренутку $\omega$. Силе које делују на штап су: $mg$ сила Земљине теже која делује из средишта на растојању $(\ell_2 - \ell_1)/2$ од ивице, сила нормалне реакције ивице стола $N$, сила трења $F_{tr}$ која је у тренутку проклизавња максимална и једнака сили трења клизања $F_{tr} = \mu N$, и центрифугална сила у ротирајућем систему $F_{cf} = m\omega^2((\ell_2 - \ell_1)/2)$ делујући на центар масе $\boxed{\textbf{4 п}}$. Пошто је $\ell_1 + \ell_2 = \ell$, где је $\ell$ дужина штапа, онда је $(\ell_2 - \ell_1)/2 = \ell/6$, па се центар масе штапа спустио за $h = (\ell \sin\theta)/6$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. По Штајнеровој теореми момент инерције штапа око осе која пролази кроз ивицу стола је $I = m\ell^2/12 + m(\ell/6)^2$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Према закону одржања енергије, целокупна потенцијална енергија штапа $mgh$ се претвори у његову кинетичку $I\omega^2/2$, па је $\omega^2 \ell = 3g\sin\theta$ $\boxed{\textbf{3 п}}$. Како непосредно пре проклизавања нема кретања дуж $x$-осе онда је $F_{tr} = mg\sin\theta + F_{cf}$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Дуж $y$-осе центар масе штапа има тренутно убрзање $a$ у смеру ротације око ивице, па је по II Њутновом закону $ma = mg\cos\theta - N$ $\boxed{\textbf{2 п}}$. Ако је тренутно угаоно убрзање штапа око ивице стола $\alpha$, где је $a = \alpha\ell/6$, онда важи да је $I\alpha = mg\cos\theta \times \ell/6$ (резултујући тренутни момент сила око ивице стола) $\boxed{\textbf{3 п}}$. Након краћих трансформација и елиминација се добија да је $\tan\theta = \mu/2 = \sqrt{3}/3$, те је $\theta = 30^\circ$ $\boxed{\textbf{2 п}}$.




Слика 1

Задатке припремили: ***Александар Буква***, Институт Лоренц, Универзитет у Лајдену
***Др Михаило Чубровић***, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичења средњих школа: ***Божидар Николић***, Физички факултет, Београд