ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ – бозонска категорија

II РАЗРЕД

ОКРУЖНИ НИВО
26.02.2017.

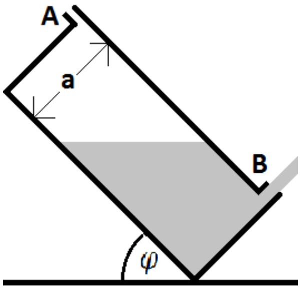
1. Суд облика правилне четворостране призме са страницом основе a напуњен је водом, тако да је запремина воде једнака половини запремине суда и износи Vo (слика 1). На суду постоје 2 отвора (занемарљивих димензија у односу на димензије суда), при чему је отвор B на почетку затворен. Суд се нагне да заклапа угао φ као на слици 1. Одредити максималну висину, у односу на сто, коју ће млаз достићи по отварању отвора B.

2. У суду промењиве запремине налази се 3 мола идеалног гаса. Гас је из стања 1, са притиском p_1 и запремином V_1, прешао у стање 2, а затим у стање 3, са притиском $\frac{\mathrm{p}_1}{3}$ и запремином $2V_1$. Гас се у процесу 1-2 ширио изотермски, а у процесу 2-3 се ширио адијабатски. Укупна промена ентропије током ова два процеса износи $\Delta S = 2.12\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.
а) Да ли је у питању једноатомски или двоатомски гас?
б) Након стања 3 гас се сабија пролазећи кроз стање 4 и враћајући се у стање 1 тако да циклус 1-2-3-4-1 представља Карноов циклус. Одредити снагу коју гас троши и корисну снагу Карноовог мотора, ако је време трајања циклуса t.

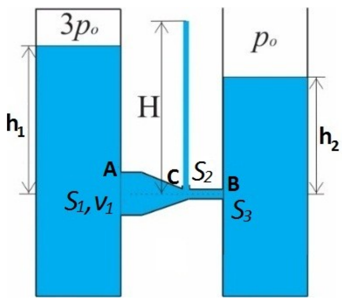
3. У хоризонталној цеви која је запечаћена на једној страни и чија је основа квадрат странице a налази се клип масе M на растојању d од запечаћеног краја. Иза клипа се налази n молова двоатомског гаса, под притиском p. Метални држач спречава клип да се удаљи од запечаћеног краја. Гас је топлотно изолован од околине. У клип хоризонтално удара метак масе m при брзини v и зарива се у њега. Наћи колики ће бити максимални померај клипа ка запечаћеном крају у односу на почетни положај пре него што се клип заустави и крене назад. Цео процес се скоро тренутно одвија. Занемарити атмосферски притисак и трење између клипа и цеви.

4. Два суда истог попречног пресека повезана су једном цеви као на слици 2. Леви суд је затворен са горње стране, а гас у њему је на притиску од 3 атмосфере. Ако су висине течности $h_1 = 1.5m$ и $h_2 = 0.5m$, а површине попречних пресека цевчица $S_1 = 1cm^2$, $S_2 = 0{,}2cm^2$ и $S_3 = 0{,}4cm^2$, одредити висину H коју достиже млаз моментално након истовременог и брзог уклањања препрека A, B и C. Брзина којом вода истиче из левог суда је $v_1 = 6{,}4\frac{m}{s}$. Густина течности је $\rho = 1000\frac{kg}{m^3}$, а атмосферски притисак $p_0 = 101\ 325\ Pa$. Узети да су ширине цевчица занемарљиве у односу на димензије судова. Гравитационо убрзање износи $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.

5. У кошаркашкој лопти запремине V налази се гас на почетној густини ρ_0 и температури T_0. Уз помоћ пумпе убацује se додатна количина гаса у лопту. Приликом сваког упумпавања у лопту се унесе ΔV запремина истоветног гаса из спољашњости, који је густине ρ_1 и температуре T_1. Запремина кошаркашке лопте се не мења. Наћи притисак и температуру гаса у кошаркашкој лопти након N упумпавања. Сматрати да је приликом сваког појединачног упумпавања промена било које величине много мања од њене апсолутне вредности.



Слика 1.

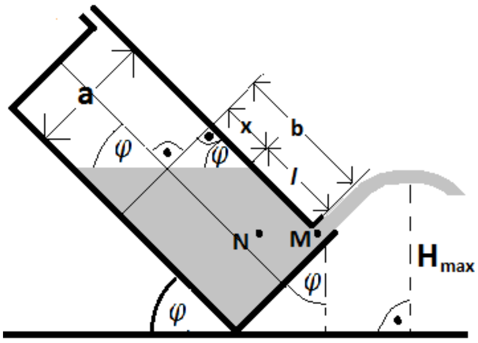


Слика 2.

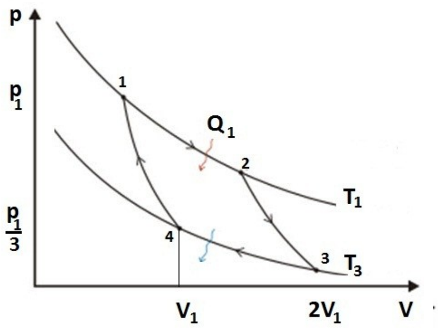
Задатке припремили: *Нора Тркља,* Физички факултет, Београд; *Немања Мадић,* Физички факултет, Београд
Рецензент: *др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење за средње школе: *Доц. др Божидар Николић,* Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ

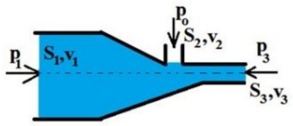
P1. Најпре је потребно одредити висински разлику h од слободне површине течности до отвора B. Са слике 1. се види да је $x = \frac{a}{2}ctg(\varphi)$ **[2п]**, при чему се из једначине $l = b - x$ **[1п]**, може закључити да је $h = l\sin(\varphi) = \frac{V_0}{a^2}\sin(\varphi) - \frac{a}{2}\cos(\varphi)$ **[4п]**. Користећи Бернулијеву једначину за тачке M и N (које су на истој висини) добија се релација $v^2 = 2gh$ **[3п]**. Пошто је потребно одредити висину коју ће млаз достићи, потребно је одредити вертикалну компоненту брзине истицања. Вертикална компонента брзине млаза износи $v_y = v\cos(\varphi)$ **[2п],** време које треба млазу да стигне до врха $t = v\cos(\varphi)/g$ **[2п]**, а укупно пењање у односу на тачку M $\frac{1}{2g}v^2cos^2(\varphi)$ **[2п]**. Следи да важи релација $H_{max} = a\cos(\varphi) + \frac{1}{2g}v^2cos^2(\varphi)$ **[2п]**, те максимална висина коју ће млаз достићи, за фиксирани угао φ, износи $H_{max} = a\cos(\varphi) + \frac{V_0}{a^2}cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{a}{2}cos^3(\varphi)$ **[2п]**.



Слика 1.



Слика 2.



Слика 3.

P2. (а) Имамо $\Delta S_{13} = \Delta S_{12} = \frac{Q}{T} = \frac{A}{T} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$ **[2п]**. Однос запремина се може добити из једначина изотерме и адијабате: $p_1V_1 = p_2V_2$ и $p_2V_2^{\gamma} = \frac{p_1}{3}(2V_1)^{\gamma}$, па је $\frac{V_2}{V_1} = (\frac{2^{\gamma}}{3})^{\frac{1}{\gamma-1}}$ **[3п]**. Промена ентропије има облик: $\Delta S = nR\ln(\frac{2^{\gamma}}{3})^{\frac{1}{\gamma-1}}$, па је $\gamma = \frac{\Delta S - nR\ln 3}{\Delta S - nR\ln 2} \approx 1.67 \approx \frac{5}{3}$, дакле у питању је једноатомски гас **[3п]**.
(б) Количина топлоте коју гас прими је $Q_1 = nRT_1\ln(\frac{V_2}{V_1}) = nRT_1\frac{1}{\gamma-1}\ln(\frac{2^{\gamma}}{3})$ **[4п]**. Мотор троши снагу: $P_{ul} = \frac{nRT_1}{t}\frac{1}{\gamma-1}\ln(\frac{2^{\gamma}}{3}) =$ $p1V1t32\ln 21.673=0.09p1V1t$ **[3п]**. Корисна снага мотора је $Pk=\eta Pul=1-T3T1nRT1t1\gamma-1\ln(2\gamma 3)$ **[3п]**. Нека је температура у процесу 3-4: T_3. Имамо сада $T_1 = \frac{p_1V_1}{nR}$, $T_3 = \frac{p_3V_3}{nR} = \frac{2p_1V_1}{3nR}$ **[1п]**. Добија се: $P_k = 0.03\frac{p_1V_1}{t}$ **[1п]**.

P3. По условима закона одржања импулса непосредно пре и после судара имамо $mv = (m+M)u$ **[4п]**, где је u брзина метка и клипа одмах након судара. Пошто је суд топлотно изолован ништа од изгубљене енергије почетног судара није допрло до гаса **[1п]**. Пошто се процес компресије гаса скоро тренутно одвија, он је адијабатски **[2п]**. Нека су p и $V = da^2$ почетне вредности притиска и запремине, а p_1 и $V_1 = (d-x)a^2$ крајње вредности **[2п]**. Имамо $p_1 = p\left(\frac{V}{V_1}\right)^{\gamma}$, где је $\gamma = \frac{7}{5}$ **[3п]**. Сав рад клипа на гасу се троши на његово загревање, а он је једнак промени кинетичке енергије клипа и метка заједно, те имамо $\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{5}{2}(p_1V_1 - pV)$ **[4п]**. Заменом свих израза у ову једначину и сређивањем добијамо $x = d\left(1 - \left(1 + \frac{m^2v^2}{5(m+M)pda^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\right)$ **[4п]**.

P4. Из једначине континуитета следи $S_1v_1 = S_2v_2 + S_3v_3$ **[4п]** (слика 3). Написавши једначину одржања енергије за течност добија се $S_1v_1\left(p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2\right) = S_2v_2\left(p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2\right) + S_3v_3\left(p_3 + \frac{\rho}{2}v_3^2\right)$ **[5п]**, при чему су $p_1 = 3p_0 + \rho g h_1$ **[2п]**, $p_2 = p_0$ **[2п]** и $p_3 = p_0 + \rho g h_2$ **[2п]**. Кад убацимо све ове вредности у једначину за одржање енергије и искористимо $v_3 = (S_1v_1 - S_2v_2)/S_3$ добијамо кубну једначину по v_2: $\frac{\rho S_2}{2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_3^2}\right)v_2^3 + \frac{3\rho S_1S_2^2v_1}{2S_3^2}v_2^2 - \left(\rho g h_2 S_2 + \frac{3\rho S_1^2S_2v_1^2}{2S_3^2}\right)v_2 - S_1v_1\left(2p_0 + \rho g(h_1 - h_2) + \frac{\rho v_1^2}{2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_3^2}\right)\right) = 0$ **[3п]**, која има једно позитивно решење: $v_2 = 24.691\frac{m}{s}$. Из једначине $v_2^2 = 2gH$ **[2п]** следи $H = 31.07$m.

P5. У почетку важи $p_0V = \frac{m_0}{M}RT_0$ **[2п]**. Како је запремина лопте константна, једначина стања се може преформулисати као $p_0 = \frac{\rho_0}{M}RT$ **[2п]**. Претпоставимо да је гас на некој температури T и густини ρ и посматрајмо колика ће бити промена ових величина са новим упумпавањем. Пошто нова маса гаса износи $\rho V + \rho_1\Delta V$ следи да је нова густина $\rho + \rho_1\frac{\Delta V}{V}$, те је $\Delta\rho = \rho_1\frac{\Delta V}{V}$ **[3п]**. Из закона одржања енергије добијамо $\frac{m+\Delta m}{M}R(T+\Delta T) = \frac{m}{M}RT + \frac{\Delta m}{M}RT_1$ **[1п]**, те следи $\Delta T = \frac{\Delta m}{m}(T_1 - T) = \frac{\rho_1}{\rho}\frac{\Delta V}{V}(T_1 - T)$**[2п]**. Из $p = \frac{\rho}{M}RT$, важи $\Delta p = \frac{\Delta\rho}{M}RT + \frac{\rho}{M}R\Delta T = \frac{\rho_1}{M}RT_1\frac{\Delta V}{V}$ **[4п]**. Приметимо да су и $\Delta\rho$ и Δp константни. Сада имамо $\rho_N = \rho_0 + N\rho_1\frac{\Delta V}{V}$ **[2п]** и $p_N = \frac{\rho_0}{M}RT_0 + N\frac{\rho_1}{M}RT_1\frac{\Delta V}{V}$ **[2п]**. Коначно имамо $T_N = \frac{Mp_N}{\rho_N R} = \frac{\rho_0T_0 + N\rho_1T_1\frac{\Delta V}{V}}{\rho_0 + N\rho_1\frac{\Delta V}{V}}$ **[2п]**.

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2015/2016. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије
ЗАДАЦИ – фермионска категорија

II РАЗРЕД

ОКРУЖНИ НИВО
26.02.2017.

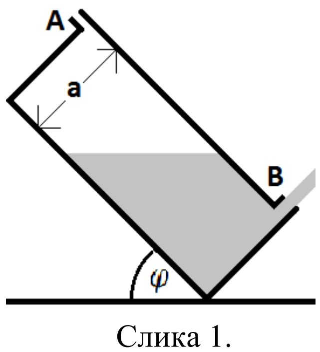
1. Суд облика правилне четворостране призме са страницом основе a напуњен је водом, тако да је запремина воде једнака половини запремине суда и износи Vo (слика 1). На суду постоје 2 отвора (занемарљивих димензија у односу на димензије суда), при чему је отвор B на почетку затворен. Суд се нагне да заклапа угао φ као на слици 1. Одредити максималну висину, у односу на сто, коју ће млаз достићи по отварању отвора B.

2. У суду промењиве запремине налази се 4 мола идеалног једноатомског гаса. Гас је из стања 1, са притиском $\mathrm{p_1}$ и запремином V_1, прешао у стање 2, а затим у стање 3, са притиском $\frac{\mathrm{p_1}}{3}$ и запремином $2V_1$. Гас се у процесу 1-2 ширио изотермски, а у процесу 2-3 се ширио адијабатски.
а) Наћи укупну промену ентропије током овог процеса. Рад гаса у изотермалном процесу износи $\mathrm{A} = nR\mathrm{T}\ln\frac{V_f}{V_i}$, где је V_i почетна запремина гаса, а V_f крајња запремина гаса.
б) Након стања 3 гас се сабија пролазећи кроз стање 4 и враћајући се у стање 1 тако да циклус 1-2-3-4-1 представља Карноов циклус. Одредити корисну снагу Карноовог мотора.
в) Одредити снагу коју гас троши ако је време трајања циклуса t.

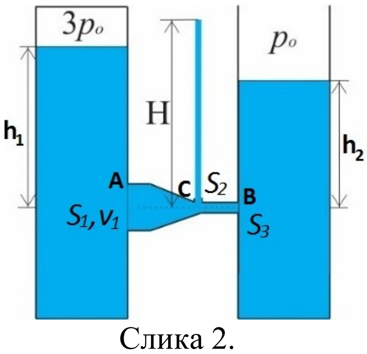
3. У хоризонталној цеви која је запечаћена на једној страни и чија је основа квадрат странице a налази се клип масе M на растојању d од запечаћеног краја. Иза клипа се налази n молова двоатомског гаса, под притиском p. Метални држач спречава клип да се удаљи од запечаћеног краја. Гас је топлотно изолован од околине. У клип хоризонтално удара метак масе m при брзини v и зарива се у њега. Наћи колики ће бити максимални померај клипа ка запечаћеном крају у односу на почетни положај пре него што се клип заустави и крене назад. Цео процес се скоро тренутно одвија. Занемарити атмосферски притисак и трење између клипа и цеви.

4. Два суда истог попречног пресека повезана су једном цеви као на слици 2. Леви суд је затворен са горње стране, а гас у њему је на притиску од 3 атмосфере. Ако су висине течности $h_1 = 1.5m$ и $h_2 = 0.5m$, а површине попречних пресека цевчица $S_1 = 1cm^2$, $S_2 = 0{,}2cm^2$ и $S_3 = 0{,}4cm^2$, одредити висину H коју достиже млаз моментално након истовременог и брзог уклањања препрека A, B и C. Брзина којом вода истиче из левог суда је $v_1 = 6{,}4\frac{m}{s}$. Густина течности је $\rho = 1000\frac{kg}{m^3}$, а атмосферски притисак $p_0 = 101\,325\,Pa$. Узети да су ширине цевчица занемарљиве у односу на димензије судова. Гравитационо убрзање износи $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.

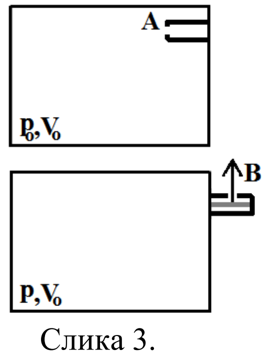
5. Суд запремине V_0, у коме се налази гас под притиском, испумпава се клипом запремине ΔV у спољашњу средину на следећи начин (слика 3): Прво се клип убаци у суд и отвори прорез A. Након што је гас испунио клип, прорез A се затвара и клип се избацује из суда. Отвара се прорез B и преградом се избацује сав гас у спољашњу средину. Затвара се прорез B и цео процес се понавља. Пронађи број испумпавања потребних да притисак у суду опадне α пута ($\alpha > 1$).



Слика 1.



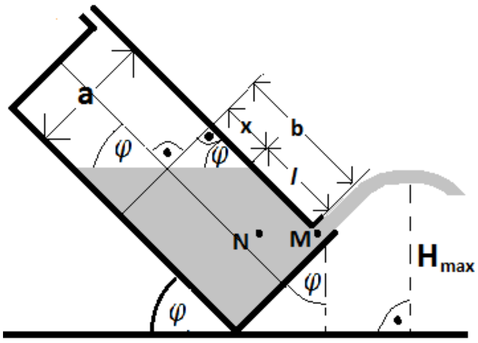
Слика 2.



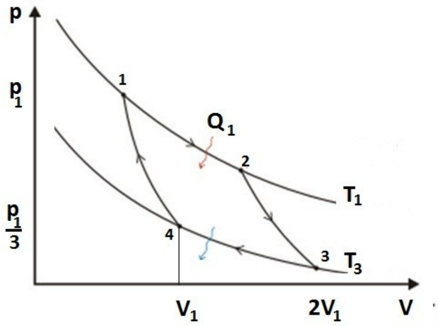
Слика 3.

Задатке припремили: : *Нора Тркља,* Физички факултет, Београд*; Немања Мадић,* Физички факултет, Београд
Рецензент: *др Никола Петровић*, Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење за средње школе: *Доц. др Божидар Николић,* Физички факултет, Београд

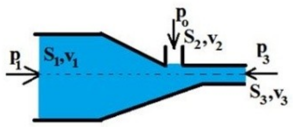
P1. Најпре је потребно одредити висински разлику h од слободне површине течности до отвора B. Са слике 1. се види да је $x = \frac{a}{2} ctg(\varphi)$ **[2п]**, при чему се из једначине $l = b - x$ **[1п]**, може закључити да је $h = l\sin(\varphi) = \frac{V_0}{a^2}\sin(\varphi) - \frac{a}{2}\cos(\varphi)$ **[4п]**. Користећи Бернулијеву једначину за тачке M и N (које су на истој висини) добија се релација $v^2 = 2gh$ **[3п]**. Пошто је потребно одредити висину коју ће млаз достићи, потребно је одредити вертикалну компоненту брзине истицања. Вертикална компонента брзине млаза износи $v_y = v\cos(\varphi)$ **[2п],** време које треба млазу да стигне до врха $t = v\cos(\varphi)/g$ **[2п]**, а укупно пењање у односу на тачку M $\frac{1}{2g}v^2 cos^2(\varphi)$ **[2п]**. Следи да важи релација $H_{max} = a\cos(\varphi) + \frac{1}{2g}v^2 cos^2(\varphi)$ **[2п]**, те максимална висина коју ће млаз достићи, за фиксирани угао φ, износи $H_{max} = a\cos(\varphi) + \frac{V_0}{a^2} cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \frac{a}{2} cos^3(\varphi)$ **[2п]**.



Слика 1.



Слика 2.



Слика 3.

P2. (а) Имамо $\Delta S_{13} = \Delta S_{12} = \frac{Q}{T} = \frac{A}{T} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}$ **[2п]**. Однос запремина се може добити из једначина изотерме и адијабате: $p_1V_1 = p_2V_2$ и $p_2V_2^\gamma = \frac{p_1}{3}(2V_1)^\gamma$, па је $\frac{V_2}{V_1} = (\frac{2^\gamma}{3})^{\frac{1}{\gamma-1}}$ **[3п]**. Промена ентропије износи: $\Delta S = nR\ln(\frac{2^\gamma}{3})^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2.827\frac{J}{K}$ **[3п]**.

(б) Коефицијент корисног дејства износи $\eta = 1 - \frac{T_3}{T_1} = \frac{1}{3}$ **[3п]**.

(в) Количина топлоте коју гас прими је $Q_1 = nRT_1\ln(\frac{V_2}{V_1}) = nRT_1\frac{1}{\gamma-1}\ln(\frac{2^\gamma}{3})$ **[4п]**. Мотор троши снагу: $P_{ul} = \frac{nRT_1}{t}\frac{1}{\gamma-1}\ln(\frac{2^\gamma}{3}) =$ *p1V1t32*ln*21.673=0.09p1V1t* **[3п]**. Корисна снага мотора је *Pk=ηPul=1−T3T1nRT1t1γ−1*ln*(2γ3)* **[3п]**. Нека је температура у процесу 3-4: T_3. Имамо сада $T_1 = \frac{p_1V_1}{nR}$, $T_3 = \frac{p_3V_3}{nR} = \frac{2p_1V_1}{3nR}$ **[1п]**. Добија се: $P_k = 0.03\frac{p_1V_1}{t}$ **[1п]**.

P3. По условима закона одржања импулса непосредно пре и после судара имамо $mv = (m+M)u$ **[4п]**, где је u брзина метка и клипа одмах након судара. Пошто је суд топлотно изолован ништа од изгубљене енергије почетног судара није допрло до гаса **[1п]**. Пошто се процес компресије гаса скоро тренутно одвија, он је адијабатски **[2п]**. Нека су p и $V = da^2$ почетне вредности притиска и запремине, а p_1 и $V_1 = (d-x)a^2$ крајње вредности **[2п]**. Имамо $p_1 = p\left(\frac{V}{V_1}\right)^\gamma$, где је $\gamma = \frac{7}{5}$ **[3п]**. Сав рад клипа на гасу се троши на његово загревање, а он је једнак промени кинетичке енергије клипа и метка заједно, те имамо $\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{5}{2}(p_1V_1 - pV)$ **[4п]**. Заменом свих израза у ову једначину и сређивањем добијамо $x = d\left(1 - \left(1 + \frac{m^2v^2}{5(m+M)pda^2}\right)^{-\frac{5}{2}}\right)$ **[4п]**.

P4. Из једначине континуитета следи $S_1v_1 = S_2v_2 + S_3v_3$ **[4п]** (слика 3). Написавши једначину одржања енергије за течност добија се $S_1v_1\left(p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2\right) = S_2v_2\left(p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2\right) + S_3v_3\left(p_3 + \frac{\rho}{2}v_3^2\right)$ **[5п]**, при чему су $p_1 = 3p_0 + \rho gh_1$ **[2п]**, $p_2 = p_0$ **[2п]** и $p_3 = p_0 + \rho gh_2$ **[2п]**. Кад убацимо све ове вредности у једначину за одржање енергије и искористимо $v_3 = (S_1v_1 - S_2v_2)/S_3$ добијамо кубну једначину по v_2: $\frac{\rho S_2}{2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_3^2}\right)v_2^3 + \frac{3\rho S_1S_2^2v_1}{2S_3^2}v_2^2 - \left(\rho gh_2S_2 + \frac{3\rho S_1^2S_2v_1^2}{2S_3^2}\right)v_2 - S_1v_1\left(2p_0 + \rho g(h_1 - h_2) + \frac{\rho v_1^2}{2}\left(1 - \frac{S_2^2}{S_3^2}\right)\right) = 0$ **[3п]**, која има једно позитивно решење: v_2=24.691$\frac{m}{s}$. Из једначине $v_2^2 = 2gH$ **[2п]** следи $H = 31.07$m.

P5. У почетку важи $p_0V_0 = \frac{m_0}{M}RT$ **[2п]**. Како је запремина суда константна, једначина стања се може преформулисати као $p_0 = \frac{\rho_0}{M}RT$ где је ρ_0 почетна густина гаса **[3п]**. У првом испумпавању маса гаса коју захвати клип износи $\Delta m = \frac{p_0\Delta VM}{RT}$ што следи из $p_0\Delta V = \frac{\Delta m}{M}RT$ **[3п]**. Маса гаса која је остала износи $m_1 = m_0 - \Delta m$ **[1п]**. Дељењем обе стране последње једначине са V_0 и сређивањем добија се однос густина пре и после испумпавања тј. $\rho_1 = \rho_0(1 - \frac{\Delta V}{V_0})$ **[3п]**. Еквивалентним поступком добија се да је густина након другог испумпавања $\rho_2 = \rho_1(1 - \frac{\Delta V}{V_0})$ те је густина након n-tog испумпавања $\rho_n = \rho_0(1 - \frac{\Delta V}{V_0})^n$ **[3п]**. Како је $\frac{p_n}{p_0} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\rho_0(1 - \frac{\Delta V}{V_0})^n}{\rho_0} = (1 - \frac{\Delta V}{V_0})^n$ **[3п]**, после логаритмовања имамо: $n = -\frac{\ln(\alpha)}{\ln(1 - \frac{\Delta V}{V_0})}$ **[2п]**.