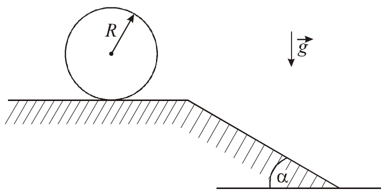
48. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2009/2010. ГОДИНЕ

II РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство Просвете Републике Србије
ЗАДАЦИ

ГИМНАЗИЈА
“ВЕЉКО ПЕТРОВИЋ”
СОМБОР, 17.04.2010.

1. Хомогена кугла полупречника $R = 1\,\mathrm{m}$ котрља се по хоризонталној равни која прелази у стрму раван нагибног угла $\alpha = 30°$ (види слику). Израчунајте које бројне вредности брзине може имати кугла да би прешла на стрму раван без скока. Клизања нема. Убрзање силе земљине теже је $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Момент инерције кугле у односу на осу која пролази кроз њен центар је $I_0 = 2mR^2/5$. **(15 п)**

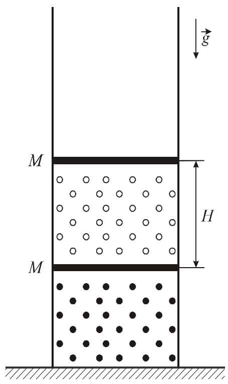


2. Високи вертикални цилиндрични суд глатких зидова садржи две коморе са гасом, које су подељене са два идентична масивна клипа сваки масе $M = 1\,\mathrm{kg}$ (видети слику). У вишој комори налази се кисеоник, а у нижој хелијум. У почетном тренутку запремине обе коморе су исте, температура гасова је иста, растојање између клипова је $H = 1\,\mathrm{m}$, и хелијум почнемо да загревамо.

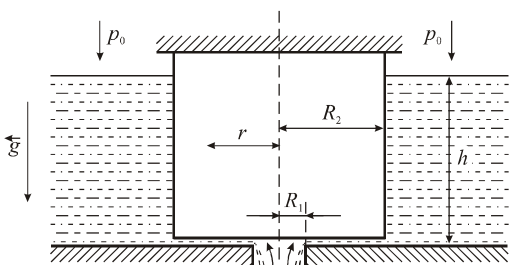
а) Колику количину топлоте треба довести хелијуму да би се његова запремина повећала два пута?

б) Колико ће бити растојање h између клипова после дужег временског интервала, када се температуре оба гаса поново изједначе?

Топлотне капацитете зидова суда и клипова занемарите. Утицај околног ваздуха на кретање клипа, као и размена топлоте са околином су занемарљиви. Топлотна проводљивост клипа је довољно мала да се за време загревања хелијума кисеоник уопште не загреје. Сматрати да је $p_0 << Mg/S$ (p_0 - атмосферски притисак) а убрзање силе земљине теже $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$. **(15 п)**



3. На хоризонталном дну широке посуде напуњене невискозном течношћу направљен је округао отвор полупречника $R_1 = 1\times10^{-2}\,\mathrm{m}$, а над њим је учвршћен округао цилиндар полупречника $R_2 = 4\times10^{-2}\,\mathrm{m}$ (види слику). Процеп између цилиндра и дна посуде је веома мали, а густина течности је $\rho = 0{,}9\,\mathrm{g/cm^3}$. Висина течности у посуди је h. На основу резултата експеримента који је користио идентичну поставку са слике, мерена је зависност статичког притиска p течности у процепу у функцији растојања r од осе отвора и цилиндра, и добијена је следећа табела:

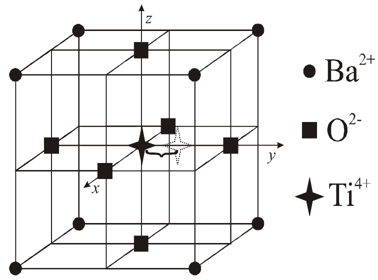


$p/[10^3\,\mathrm{Pa}]$	102,8	104,9	106,2	107,9	108,7	109,4
$r/[\mathrm{cm}]$	1,1	1,3	1,5	2,0	2,5	3,4

а) Извести општи израз за зависност статичког притиска p течности у процепу у функцији растојања r од осе отвора и цилиндра.

б) Користећи се датом табелом и резултатом под а), знајући да је апсолутна грешка $\Delta p = 1\times10^2$ Pa и релативна грешка $\delta r = 3\,\%$, нацртајте одговарајући график који даје везу између p и r, и помоћу њега израчунајте висину h течности у посуди и вредност притиска p_0. Убрзање силе земљине теже је $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. Грешке за R_1, R_2, ρ и g су занемарљиве. **(25 п)**

4. На слици је приказана (упрошћено) елементарна ћелија баријум-титаната (приближно коцка ивице $a = 4\times10^{-10}$ m). Одредите јачину, правац и смер спољашњег хомогеног електричног поља **E** које држи у равнотежи Ti^{4+} јон померен за $y = 0{,}1\times10^{-10}$ m из центра коцке. Претпоставите да је ћелија изоловани систем и да делују само кулоновске силе. Вредност елементарног наелектрисања је $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C. Узети да је $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\times10^9$ m/F. **(25 п)**



5. Посматрајмо топлотно изоловани цилиндар у коме се, испод лаког, глатког и чврстог клипа, налазила смеша једнаких количина воде (m_{H_2O}) и леда (m_i): $m_{H_2O} = m_i = m = 1$ kg. Притисак на клип повећамо од почетне вредности $p_0 = 10^5$ Pa до $p_1 = 2{,}5\times10^6$ Pa.

а) Израчунајте масу леда Δm_i ($\Delta m_i << m$) који се истопио током овог повећања притиска као и укупан рад који је извршила спољашња сила деловањем на клип да би истопила ту количину леда ако претпоставите да су лед и вода нестишљиви. Познато је да је за снижење температуре топљења леда у смеши за један степен потребно извршити притисак на клип од почетне вредности $p_0 = 10^5$ Pa до $p = 14\times10^6$ Pa.

б) Израчунајте колико износи укупан рад спољашње силе знајући да су и лед и вода стишљиви. Познато је да је за истовремено релативно смањење запремине воде у смеши за 1 % и леда за 0,5 % потребно извршити притисак на клип од почетне вредности $p_0 = 10^5$ Pa до $p' = 20\times10^6$ Pa.

Сматрајте да су све промене притиска довољно споре да обезбеде линеарну зависност од температуре и запремине ($\Delta p \sim \Delta T$ и $\Delta p \sim \Delta V$). Специфични топлотни капацитет воде је $c_{H_2O} = 4{,}2$ J/(g·K) а леда $c_i = 2{,}1$ J/(g·K). Специфична топлота фазног прелаза топљења леда износи $\lambda = 3{,}4\times10^5$ J/kg а густина леда износи $\rho_i = 0{,}9\,\rho_{H_2O}$, где је $\rho_{H_2O} = 10^3$ kg/m^3. **(20 п)**

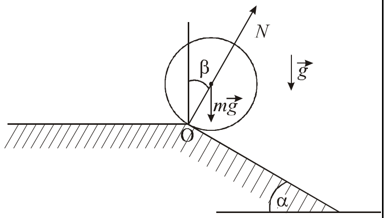
* * * * * * * * * *

ПОМОЋ

Неке основне тригонометријске једнакости и формуле:				
$\sin 0° = 0$	$\sin 30° = 1/2$	$\sin 45° = \sqrt{2}/2$	$\sin 60° = \sqrt{3}/2$	$\sin 90° = 1$
$\cos 0° = 1$	$\cos 30° = \sqrt{3}/2$	$\cos 45° = \sqrt{2}/2$	$\cos 60° = 1/2$	$\cos 90° = 0$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2$
$\sin\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$	$\cos^2(\alpha/2) = (1+\cos\alpha)/2$
$\cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,2\alpha = 2\mathrm{tg}\alpha/(1-\mathrm{tg}^2\alpha)$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

Задатке припремила: *Маја Рабасовић,* Институт за физику, Београд
Рецензент: *др Драган Д. Маркушев,* Институт за физику, Београд
Председник Комисије за такмичење ДФС: *Проф. др Мићо Митровић,* Физички факултет, Београд



P1. Пошто се кугла креће без клизања, приликом преласка са хоризонталне на стрму раван центар масе кугле почиње да ротира око тачке О те две равни. Пошто је кугла још и хомогена током преласка са једне на другу раван њен центар масе се креће по замишљеној кружници исто као што би се кретала и одговарајућа материјална тачка. Брзина центра масе кугле биће v_1 а угао који она заклапа са вертикалом је β (види слику). За кружно кретање центра масе кугле при овом преласку важи једначина

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg\cos\beta - N \quad \text{или} \quad v_1^2 = gR\cos\beta - \frac{NR}{m}, \quad \textbf{(2 п)} \qquad (*)$$

где је N сила реакције подлоге. На основу закона одржања енергије за положаје непосредно пре преласка на стрму раван и непосредно по преласку на стрму раван можемо да пишемо да је:

$$\frac{1}{2} I \frac{v_1^2}{R^2} - \frac{1}{2} I \frac{v_0^2}{R^2} = mgR(1-\cos\beta). \quad \textbf{(3 п)}$$

где је I момент инерције кугле који ротира око тачке О. Он се добија помоћу Штајнерове теореме: $I = I_0 + mR^2 = 7mR^2/5$ **(1 п)**, јер је $I_0 = 2mR^2/5$. Заменивши I у једначину која се добија на основу закона одржања енергије, и једноставним сређивањем добија се:

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{10}{7} gR(1-\cos\beta). \quad \textbf{(1 п)} \qquad (**)$$

Изједначавањем (*) и (**) добија се да је

$$v_0^2 = \frac{gR}{7}(17\cos\beta - 10) - \frac{NR}{m}. \quad \textbf{(1 п)}$$

Јасно је да је $\beta \le \alpha$ **(1 п),** па за $\beta = \alpha$ имамо да је

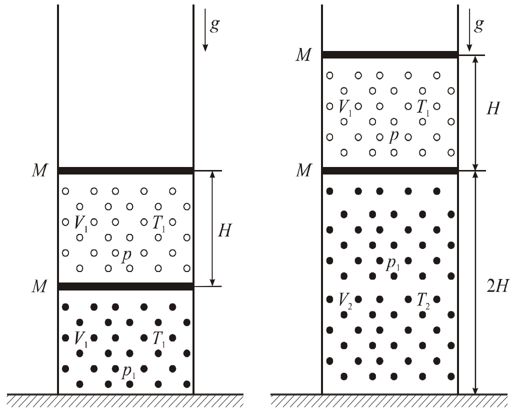
$$v_0^2 = \frac{gR}{7}(17\cos\alpha - 10) - \frac{N_0 R}{m}, \quad \textbf{(1 п)}$$

где је N_0 одговарајућа сила реакције. Приметимо да је $N \ge N_0$ **(1 п)**. Услов да нема скока је $N_0 > 0$ **(1 п)**, па ће брзине кугле при којима неће бити скока на стрму раван имати вредности

$$\boxed{v_0 < v_{max} = \sqrt{\frac{gR}{7}(17\cos\alpha - 10)} = \sqrt{\frac{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 1\,\text{m}}{7}\left(17\frac{\sqrt{3}}{2} - 10\right)} = 2{,}57\frac{\text{m}}{\text{s}}}. \quad \textbf{(3 п)}$$

* * *

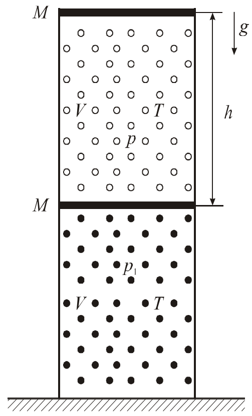
Р2. Из услова задатка дато је да су клипови масивни, па можемо сматрати да је маса гасова занемарљива у поређењу са њиховом масом. Приликом загревања хелијума процес ширења се одвија при његовом константном притиску од $p_1 = 2p = 2Mg/S$ $\left(p_0 << Mg/S\right)$, где је S површина попречног пресека клипа. Почетна температура гасова је иста T_1, а притисак хелијума је двоструко већи, па је количина хелијума дупло већа од количине кисеоника, тј $\nu_{\mathrm{He}} = 2\nu_{\mathrm{O}_2}$ **(1 п)**.



а) Количина топлоте коју је неопходно довести хелијуму да би му се запремина повећала два пута $\left(V_2 = 2V_1 = 2SH\right)$ износи:

$$\boxed{Q = \nu_{\mathrm{He}} C_p \left(T_2 - T_1\right) = \nu_{\mathrm{He}} \frac{5}{2} R\left(T_2 - T_1\right) = \frac{5}{2} p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{5}{2}\frac{2Mg}{S}\left(2V_1 - V_1\right) = 5MgH = 50\ \mathrm{J}}$$ **.(5 п)**

б) *I начин:* После изједначавања температуре запремине се поново изједначавају. Да би нашли тражено растојање h између клипова искористимо закон одржања енергије. Пошто је систем топлотно изолован, његова укупна енергија на крају загревања хелијума и по коначном изједначавању температура мора бити непромењена. После загревања хелијума укупна потенцијална енергија клипова ће бити:



$$Mg \cdot 2H + Mg \cdot 3H = 5MgH$$, **(2 п)**

а њихова укупна енергија је:

$$5MgH + \frac{5}{2}\nu_{\mathrm{O}_2} RT_1 + \frac{3}{2}\nu_{\mathrm{He}} RT_2 = 5MgH + \frac{5}{2}\nu_{\mathrm{O}_2} RT_1 + \frac{3}{2} 2\nu_{\mathrm{O}_2} R \cdot 2T_1 =$$

$$= 5MgH + \frac{5}{2} MgH + 6MgH = 13{,}5MgH$$. **(2 п)**

После изједначавања температура укупна енергија клипова износи

$$Mgh + 2Mgh + \frac{5}{2}\nu_{\mathrm{O}_2} RT + \frac{3}{2}\nu_{\mathrm{He}} RT = 8{,}5Mgh$$. **(2 п)**

Изједначивши последња два израза добијамо да је:

$$\boxed{h = \frac{27}{17} H \approx 1{,}6\ \mathrm{m}}$$. **(3 п)**

II начин: На основу услова задатка количина топлоте коју отпусти хелијум Q_{He} мора бити једнака количини топлоте коју прими кисеоник $Q_{\mathrm{O_2}}$. Означимо са T_3 температуру оба гаса по успостављању равнотеже. Сада можемо да пишемо:

$$Q_{\mathrm{He}} = Q_{\mathrm{O_2}},$$

$$\nu_{\mathrm{He}} \frac{5}{2} R(T_2 - T_3) = \nu_{\mathrm{O_2}} \frac{7}{2} R(T_3 - T_1),$$

$$2\nu_{\mathrm{O_2}} \cdot 5(T_2 - T_3) = \nu_{\mathrm{O_2}} \cdot 7(T_3 - T_1),$$

$$10 \cdot (T_2 - T_3) = 7 \cdot (T_3 - T_1),$$

$$10T_2 + 7T_1 = 17T_3,$$

па уз $T_2 = 2T_1$ добијамо да је

$$T_3 = \frac{20T_1 + 7T_1}{17} = \frac{27}{17} T_1 .$$

За кисеоник по успостављању равнотеже важи релација

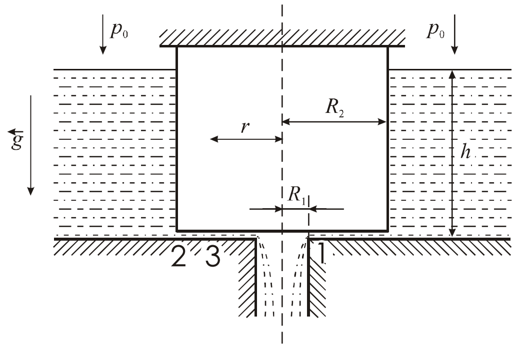
$$p_{\mathrm{O_2}} Sh = \nu_{\mathrm{O_2}} R T_3,$$

$$\frac{MgSh}{S} = \nu_{\mathrm{O_2}} R T_1 \frac{27}{17} = MgH \frac{27}{17},$$

одакле је

$$\boxed{h = \frac{27}{17} H \approx 1{,}6\ \mathrm{m}}$$

* * *



P3. а) Опште решење овог задатка може се добити на следећи начин. Вода протиче кроз мали процеп и утиче у отвор. Означимо са d дебљину процепа. Користећи се једначином континуитета можемо да пишемо да је

$$(2\pi R_1 d)v_1 = (2\pi r d)v = (2\pi R_2 d)v_2 \text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

или

$$R_1 v_1 = rv = R_2 v_2 \text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

где су v_1, v_2 и v брзине течности у тачкама 1, 2 и 3 респективно (види слику). На основу Бернулијеве (*Bernoulli*) једначине одмах испред и иза тачке 2 можемо да пишемо да је

$$p_0 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \text{. } \mathbf{(1\ п)}$$

где је густина течности означена са ρ. Користећи исту теорему у тачкама 3 и 1 добијамо да је

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p + \frac{1}{2}\rho v^2 \text{ и } p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

јер је притисак у отвору p_0. Из последње три једнакости добијамо да је $v_1 = \sqrt{2gh}$ **(1 п)**, и

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[1 - \left(\frac{v}{v_1}\right)^2\right] \text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

што, искористивши једнакости једначине континуитета, даје општи израз за зависност статичког притиска p течности у процепу у функцији растојања r од осе отвора и цилиндра:

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h\left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right]} \text{. } \mathbf{(1\ п)}$$

б) Из коначног израза за p добијеног под а) јасно је да се може нацртати линеаризовани график $p = f(x)$ користећи се изразом

$$p = a + bx \text{, } \mathbf{(1\ п)}$$

где је $a = p_0$ (одсечак на p оси), $x = \left[1 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right]$ а $b = \rho g h$ коефицијент правца праве графика.

График $p = f(x)$ се црта на основу табеле **(2 п)**

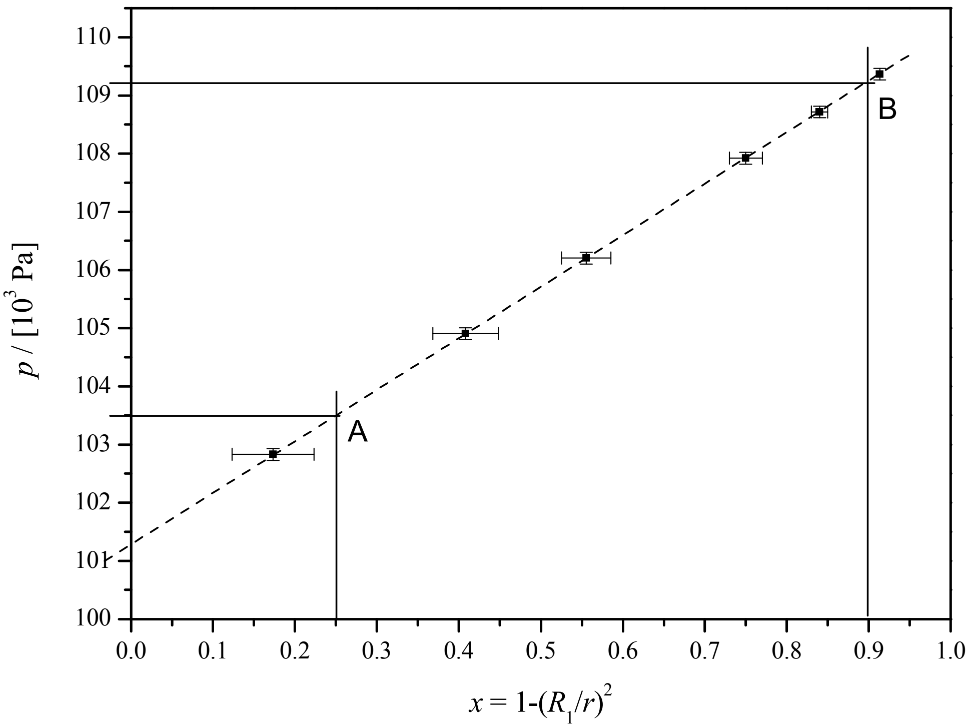
$(p \pm \Delta p)/[10^3\,\mathrm{Pa}]$	102,8±0,1	104,9±0,1	106,2±0,1	107,9±0,1	108,7±0,1	109,4±0,1
$(r \pm \Delta r)/[\mathrm{cm}]$	1,10±0,03	1,30±0,04	1,50±0,05	2,00±0,06	2,50±0,08	3,4±0,1
$(x \pm \Delta x)$	0,17±0,05	0,41±0,04	0,56±0,03	0,75±0,02	0,84±0,01	0,913±0,005

где су грешке за p и r дате у поставци задатка ($\Delta p = 1\times 10^2$ Pa и $\delta r = \frac{\Delta r}{r} = 3\% = 0{,}03$). Грешка за

x је рачуната по формули

$$\Delta x = 2 \cdot \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta r}{r}\right) = 2 \cdot \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 \cdot \frac{\Delta r}{r}\,.$$ **(1 п)**

График зависности $p = f(x)$



(4 п)

Када нацртамо поменути график, узмемо две тачке са праве и то тако да прву тачку узимамо између прве две **(0,5 п)** A(0,25, 103,5 x10^3 Pa), а другу између последње две експерименталне тачке **(0,5 п)** B(0,9, 109,2 x10^3 Pa). На основу њих добијамо коефицијент правца праве

$$b = \frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{p_B - p_A}{x_B - x_A} = \frac{(109{,}2 - 103{,}5)}{(0{,}9 - 0{,}25)} \times 10^3 \text{ Pa} = \frac{5{,}7}{0{,}65} \times 10^3 \text{ Pa} = 8{,}769 \times 10^3 \text{ Pa}.$$ **(1 п)**

Грешка коефицијента правца износи

$$\Delta b = b\left(\frac{\Delta p_A + \Delta p_B}{p_B - p_A} + \frac{\Delta x_A + \Delta x_B}{x_B - x_A}\right) = 8{,}769 \times 10^3 \text{Pa}\left(\frac{0{,}1 + 0{,}1}{5{,}7} + \frac{0{,}05 + 0{,}01}{0{,}65}\right) = 1{,}117 \times 10^3 \text{Pa}\,.$$ **(1 п)**

Сада је

$$\boxed{b = (9 \pm 1) \times 10^3 \text{Pa}}$$ **(1 п)**

Сада се, на основу $b = \rho g h$ може израчунати висина h као

$$h = \frac{b}{\rho g} = \frac{9\times10^3\,\mathrm{Pa}}{0{,}9\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 1{,}01\,\mathrm{m}\,.\ \textbf{(1 п)}$$

Грешка за овако израчунату висину износи

$$\Delta h = h\left(\frac{\Delta b}{b}\right) = 1{,}01\,\mathrm{m}\cdot\left(\frac{1}{9}\right) = 0{,}11\,\mathrm{m}\,,\ \textbf{(1 п)}$$

па је на крају

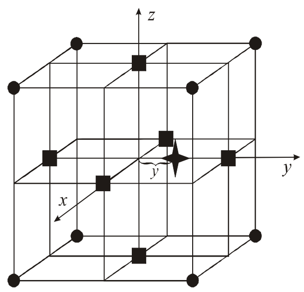
$$\boxed{h = (1{,}0 \pm 0{,}1)\mathrm{m}}\ \textbf{(1 п)}$$

Са графика се може добити одсечак на p оси тј. $a = p_0 = 101{,}3\times10^3\,\mathrm{Pa}$ **(1 п)** чија грешка износи $\Delta p_0 = 0{,}1\times10^3\,\mathrm{Pa}$ (или вредност једног подеока на графику) **(1 п)**. То значи да је

$$\boxed{p_0 = (101{,}3 \pm 0{,}1)\times10^3\,\mathrm{Pa}}\,.\ \textbf{(1 п)}$$

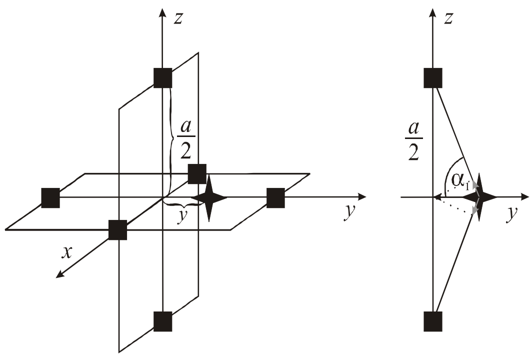
* * *

P4. Услов равнотеже за Ti^{4+} померен за $y = 0{,}1\times10^{-10}\,\mathrm{m}$ из центра је:



$$0 = \mathbf{F}_{\mathrm{Ti}} = \sum_{\mathrm{j=1}}^{6}\mathbf{F}_{\mathrm{Ti}^{4+},\mathrm{O}^{2-}_{(\mathrm{j})}} + \sum_{\mathrm{j=1}}^{8}\mathbf{F}_{\mathrm{Ti}^{4+},\mathrm{Ba}^{2+}_{(\mathrm{j})}} + 4e\mathbf{E}\ \textbf{(3 п)},$$

Нађимо сада укупну силу која потиче од O^{2-} јона. Гледајући слику можемо да пишемо да је укупна сила која потиче од два O^{2-} јона дуж $z-$осе:



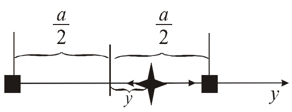
$$\mathbf{F}' = -F\mathbf{e}_y \quad \textbf{(1 п)},$$

$$-F\mathbf{e}_y = -(F_{y1} + F_{y2})\mathbf{e}_y = -2F_{y1}\mathbf{e}_y = -2F\cos\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_y = -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{8e^2}{\left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right)}\cos\alpha \cdot \mathbf{e}_y \quad \textbf{(2 п)},$$

што уз $\cos\alpha_1 = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 + \dfrac{a^2}{4}}}$ даје:

$$\mathbf{F}' = -F\mathbf{e}_y = -\frac{8e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2y}{\left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}\mathbf{e}_y \quad \textbf{(2 п)},$$

и *усмерена је ка центру коцке*. Овим смо нашли силу $\mathbf{F}'$ која потиче од O^{2-} јона дуж $z-$осе. Ако сада $z-$осу заменимо са $x-$осом добићемо исту слику и идентичан резултат, тј. $\mathbf{F}$ која



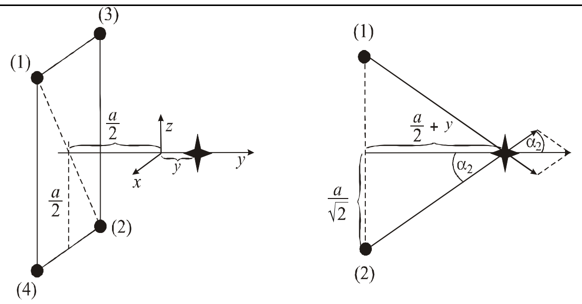
потиче од O^{2-} јона дуж $x-$осе једнака је $\mathbf{F}'$. Укупна сила $\mathbf{F}''$ која потиче од O^{2-} јона дуж $y-$осе је

$$\mathbf{F}'' = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{8e^2}{\left(\frac{a}{2} - y\right)^2} - \frac{8e^2}{\left(\frac{a}{2} + y\right)^2}\right]\mathbf{e}_y \quad \textbf{(2 п)},$$

и усмерена је *од центра коцке*, па је укупна сила $\mathbf{F}_{\mathrm{totalTi^{4+},O^{2-}}}$ која потиче од O^{2-} јона дуж $y-$осе

$$\mathbf{F}_{\mathrm{totalTi^{4+},O^{2-}}} = \sum_{j=1}^{6}\mathbf{F}_{\mathrm{Ti^{4+},O^{2-}_{(j)}}} = 2\mathbf{F}' + \mathbf{F}'' = \frac{8e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{-4y}{\left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2} - y\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + y\right)^2}\right]\mathbf{e}_y \quad \textbf{(2 п)}.$$

и *усмерена је од центра коцке*. Остаје још да се нађе укупна сила $\mathbf{F}_{\mathrm{totalTi^{4+},Ba^{2+}}}$ која потиче од Ba^{2+} јона који делују на Ti^{4+}. Посматрајмо утицај Ba^{2+} јона из $y = -a/2$ равни. Сила од (1) и (2) је:



$$\mathbf{F}'''=2F_{(1)}\mathbf{e}_y=2\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{8e^2}{\left[\left(\frac{a}{2}+y\right)^2+\frac{a^2}{2}\right]}\cos\alpha_2\cdot\mathbf{e}_y=2\frac{8e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{2}+y\right)}{\left[\left(\frac{a}{2}+y\right)^2+\frac{a^2}{2}\right]^{3/2}}\mathbf{e}_y\ \textbf{(2 п)},$$

где је $\cos\alpha_2=\dfrac{\frac{a}{2}+y}{\sqrt{\left(y+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}}}$. Укупна сила од преостала два Ba^{2+} јона (3) и (4) из исте равни је иста као и претходна тако да је сада

$$\mathbf{F}_{(\mathrm{y=-a/2})\mathrm{Ti}^{4+},\mathrm{Ba}^{2+}}=2\mathbf{F}'''=4\frac{8e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{\left(\frac{a}{2}+y\right)}{\left[\left(\frac{a}{2}+y\right)^2+\frac{a^2}{2}\right]^{3/2}}\mathbf{e}_y\text{, }\textbf{(1 п)}$$

и *усмерена је од центра коцке*. Укупна сила која потиче од Ba^{2+} јона из $y=a/2$ равни се добија на основу претходног израза заменом $y\to -y$ $\left(\mathbf{e}_y\to -\mathbf{e}_y\right)$ и *усмерена је ка центру коцке*. Сада можемо да напишемо да је:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{totalTi}^{4+},\mathrm{Ba}^{2+}}=\sum_{\mathrm{j=1}}^{8}\mathbf{F}_{\mathrm{Ti}^{4+},\mathrm{Ba}^{2+}_{(\mathrm{j})}}=4\frac{8e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\frac{a}{2}+y\right)}{\left[\left(\frac{a}{2}+y\right)^2+\frac{a^2}{2}\right]^{3/2}}-\frac{\left(\frac{a}{2}-y\right)}{\left[\left(\frac{a}{2}-y\right)^2+\frac{a^2}{2}\right]^{3/2}}\right]\mathbf{e}_y\text{, }\textbf{(2 п)}$$

и *усмерена је од центра коцке*. Дакле, услов равнотеже је

$$-4e\mathbf{E}=\sum_{\mathrm{j=1}}^{6}\mathbf{F}_{\mathrm{Ti}^{4+},\mathrm{O}^{2-}_{(\mathrm{j})}}+\sum_{\mathrm{j=1}}^{8}\mathbf{F}_{\mathrm{Ti}^{4+},\mathrm{Ba}^{2+}_{(\mathrm{j})}}=$$

$$=\frac{8e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{-4y}{\left(y^2+\dfrac{a^2}{4}\right)^{3/2}}+\frac{1}{\left(\dfrac{a}{2}-y\right)^2}-\frac{1}{\left(\dfrac{a}{2}+y\right)^2}\right]\mathbf{e}_y+$$

$$+4\frac{8e^2}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{\left(\dfrac{a}{2}+y\right)}{\left[\left(\dfrac{a}{2}+y\right)^2+\dfrac{a^2}{2}\right]^{3/2}}-\frac{\left(\dfrac{a}{2}-y\right)}{\left[\left(\dfrac{a}{2}-y\right)^2+\dfrac{a^2}{2}\right]^{3/2}}\right]\mathbf{e}_y\text{, } \textbf{(3 п)}$$

што даје, коначно, уз $a=4\times10^{-10}$ m, $y=0{,}1\times10^{-10}$ m, $e=1{,}6\times10^{-19}$ C и $1/(4\pi\varepsilon_0)=9\times10^9$ m/F:

$$\boxed{E=\frac{2e}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(\dfrac{a}{2}+y\right)^2}-\frac{1}{\left(\dfrac{a}{2}-y\right)^2}+\frac{4y}{\left(y^2+\dfrac{a^2}{4}\right)^{3/2}}-\frac{4\left(\dfrac{a}{2}+y\right)}{\left[\left(\dfrac{a}{2}+y\right)^2+\dfrac{a^2}{2}\right]^{3/2}}+\frac{4\left(\dfrac{a}{2}-y\right)}{\left[\left(\dfrac{a}{2}-y\right)^2+\dfrac{a^2}{2}\right]^{3/2}}\right]\sim-1{,}33\times10^8\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}.\ \textbf{(3 п)}$$

Поље је усмерено *ка центру коцке* и има правац *дуж y*-осе. Приметимо да је $E=0$ за $y=0$. **(2 п)**

* * *

P5. а) Размотримо прво случај када су лед и вода нестишљиви, тј. не мењају запремину под дејством спољашњих сила. Специфична топлота фазног прелаза једнака је, у нашем случају, $\lambda=Q/\Delta m_{\mathrm{i}}$ **(1 п)**, где је Q количина топлоте која је потребно довести систему за топљење леда. Закон одржања енергије за овај процес каже да се рад A који изврши спољашња сила на клип троши на топљење леда у суду (издвајање одређене количине топлоте Q) и промену температуре леда и воде (промену унутрашње енергије смеше ΔU, уз $m_{\mathrm{H_2O}}=m_{\mathrm{i}}=m$,), тј.:

$$A=Q-\Delta U\text{, } \textbf{(1 п)}$$

одакле је

$$Q=A+\Delta U=A+\left(c_{\mathrm{H_2O}}m_{\mathrm{H_2O}}+c_{\mathrm{i}}m_{\mathrm{i}}\right)\Delta T=A+\left(c_{\mathrm{H_2O}}+c_{\mathrm{i}}\right)m\Delta T\text{,}$$

па је

$$\Delta m_{\mathrm{i}}=\frac{A+\left(c_{\mathrm{H_2O}}+c_{\mathrm{i}}\right)m\Delta T}{\lambda}.\ \textbf{(1 п)}$$

Видимо, из последње једначине, да су нам непознате вредности рада A и промене температуре смеше ΔT. Оно што прво можемо да урадимо то је да нађемо промену температуре смеше као последицу повећања спољашњег притиска, имајући у виду податак из поставке задатка о снижењу температуре топљења леда за $1\,\mathrm{K}$ и да је $\Delta p \sim \Delta T$:

$$\frac{\Delta T}{(1\,\mathrm{K})} = \frac{(p_1 - p_0)}{(p - p_0)} \Rightarrow \Delta T = (1\,\mathrm{K}) \cdot \frac{(2{,}5 - 0{,}1) \times 10^6\ \mathrm{Pa}}{(14{,}0 - 0{,}1) \times 10^6\ \mathrm{Pa}} \approx 0{,}17\,\mathrm{K}\,.\ \textbf{(1 п)}$$

Покушајмо да проценимо вредност рада A који изврши спољашња сила. Ако са V_A означимо запремину смеше пре топљења леда, а са V_B запремину смеше после топљења леда, промена запремине смеше ΔV услед топљења масе леда Δm_i износи

$$\Delta V = V_\mathrm{A} - V_\mathrm{B} = \left(\frac{m_{\mathrm{H_2O}}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} + \frac{m_\mathrm{i}}{\rho_\mathrm{i}} \right) - \left(\frac{m_{\mathrm{H_2O}} + \Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} + \frac{m_\mathrm{i} - \Delta m_\mathrm{i}}{\rho_\mathrm{i}} \right) = \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_\mathrm{i}} - \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} =$$

$$= \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{0{,}9\rho_{\mathrm{H_2O}}} - \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} \left(\frac{10}{9} - 1 \right) = \frac{1}{9} \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}}\,.\ \textbf{(1 п)}$$

Ако искористимо $\Delta m_\mathrm{i} << m_\mathrm{i}$ можемо да пишемо да је $\Delta V = \frac{1}{9} \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} << 0{,}1 \frac{m}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} \approx 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$ **(0,5)**. На основу тога процењени рад износи $A \approx p_1 \Delta V << 2{,}5 \times 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3 = 2{,}5 \times 10^2\ \mathrm{J}$ **(0,5 п)**. Промена унутрашње енергије система ΔU током загревања маса леда m_i и масе воде $m_{\mathrm{H_2O}}$ за ΔT степени је $\Delta U = \left(c_{\mathrm{H_2O}} + c_\mathrm{i}\right) \cdot m \cdot \Delta T = (4{,}2 + 2{,}1) \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{K}} \cdot 1\mathrm{kg} \cdot 0{,}17\mathrm{K} \approx 1{,}1 \times 10^3\mathrm{J}$ **(0,5 п)**, па је очигледно $A << \Delta U$ **(1 п)** Због свих ових горенаведених односа можемо написати да је $\Delta m_\mathrm{i} \cong \Delta U / \lambda$, па је маса леда Δm_i који се истопио током повећања притиска

$$\boxed{\Delta m_\mathrm{i} = \frac{\Delta U}{\lambda} \approx 3{,}2 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}.}\ \textbf{(2 п)}$$

Сада промена запремине смеше услед топљења масе леда Δm_i износи

$$\Delta V = \frac{1}{9} \frac{\Delta m_\mathrm{i}}{\rho_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3{,}2 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg}}{10^3\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} \approx 3{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}^3\,.\ \textbf{(0,5)}$$

Из поставке задатка знамо да је $\Delta p \sim \Delta V$, па налазимо рад спољашње силе A' по формули

$$\boxed{A' = \frac{1}{2} p_1 \Delta V \approx \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \times 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot 3{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}^3 = 0{,}45\ \mathrm{J}.}\ \textbf{(2 п)}$$

б) Размотримо сада случај када су и лед и вода стишљиви, тј. када мењају запремину под дејством спољашњих сила. Из услова задатка имамо да је за истовремено смањење запремине воде у смеши за 1 % и леда за 0,5 % потребан притисак од $p' = 20 \times 10^6\ \mathrm{Pa}$.

Релативна промена запремине смеше услед дејства спољашње силе (уз врло малу промену температуре) износи

$$\frac{\Delta V}{V'} = \frac{\Delta p}{p'}, \textbf{ (1 п)}$$

одакле следи да је

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{V'}{p'} = \frac{\left(V'_{\mathrm{H_2O}} + V'_{\mathrm{i}}\right)}{p'} = \frac{\left(10^{-2} V_{\mathrm{H_2O}} + \frac{10^{-2}}{2} V_{\mathrm{i}}\right)}{p'}, \textbf{ (1 п)}$$

па је, уз $V_{\mathrm{H_2O}} = m / \rho_{\mathrm{H_2O}} = 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$ и $V_{\mathrm{i}} = m / \rho_{\mathrm{i}} = 1{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$,

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{10^{-2}\left(10^{-3}\ \mathrm{m^3} + \frac{1{,}1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3}}{2}\right)}{20 \times 10^6\ \mathrm{Pa}} = 7{,}75 \times 10^{-13}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{Pa}}. \textbf{ (1 п)}$$

Сада, за промену притиска од p_0 до p_1, можемо да пишемо да је

$$\frac{\Delta V}{(p_1 - p_0)} = 7{,}75 \times 10^{-13}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{Pa}} \Rightarrow \Delta V = (p_1 - p_0) \cdot 7{,}75 \times 10^{-13}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{Pa}}, \textbf{ (1 п)}$$

што заменом бројних вредности даје промену запремине смеше услед дејства спољашње силе од

$$\Delta V = (2{,}5 - 0{,}1) \times 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot 7{,}75 \times 10^{-13}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{Pa}} = 18{,}6 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^3} \approx 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3}. \textbf{ (1 п)}$$

Рад који изврши спољашња сила да би променила запремину воде и леда износи

$$A'' = \frac{1}{2} p_1 \Delta V \approx \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \times 10^6\ \mathrm{Pa} \cdot 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^3} = 2{,}5\ \mathrm{J}, \textbf{ (2 п)}$$

па је укупан рад A_{total} који изврши спољашња сила, у случају када сматрамо воду и лед стишљивим, једнак

$$\boxed{A_{\mathrm{total}} = A' + A'' \approx 0{,}45\ \mathrm{J} + 2{,}50\ \mathrm{J} = 2{,}95\ \mathrm{J}.} \textbf{ (1 п)}$$

* * *