



I разред

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА – А КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
9. мај 2026.

1. Корак 1: Пошто се куглица еластично одбија о стрму раван, онда је брзина којом се одбила једнака по интензитету брзини којом је куглица ударила о стрму раван. Ако се координатни систем изабере као на Слици 1, онда су пројекције (почетне) брзине и убрзања на x и y осу: $v_{0x} = v_0 \sin \alpha = \frac{v_0}{2}$ [1п], $v_{0y} = v_0 \cos \alpha = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2}$ [1п], $g_x = g \sin \alpha = \frac{g}{2}$ [1п], $g_y = -g \cos \alpha = -g \frac{\sqrt{3}}{2}$ [1п].

Корак 2: Координата y се мења са временом на следећи начин: $y(t) = v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2} = v_0 \cos \alpha t - \frac{g \cos \alpha t^2}{2}$ [3п]. Време између првог и другог судара куглице са стрмом равни, T , се добија из узлова $y(T) = 0$ [2п], $T = \frac{2v_0}{g}$ [1п]. Компонента брзине v_y којом куглица удара у тачку 2 је $v_y(T) = v_{0y} + g_y T = -v_0 \cos \alpha$. Приликом судара компонента брзине v_y промени знак, а компонента v_x остане као пре судара. Закључујемо да је време између свака два узастопна судара $T = \frac{2v_0}{g}$. Укупно време је $t = nT$ [3п], где је n број судара (након првог удара куглице о стрму раван брзином v_0).

Корак 3: За растојање l важи $l = v_x t + v_{0x} t + \frac{g_x t^2}{2}$ [3п], одакле се добија квадратна једначина за n , $n^2 + \frac{5}{3}n - \frac{lg}{v_0^2} = 0$ [1п]. Њено физичко решење је $n = 4,83$ [1п], па је укупан број судара $4 + 1 = 5$ [2п].

2. а) Корак 1: Између нити и тела T јавља се сила трења у тачкама у којима нит мења правац. Због постојања сила трења у тим двома тачкама сила затезања трпи скок, па сила затезања има три различите вредности дуж нити [1п]. Лево од тела сила затезања је $F_z = mg$ [2п], а десно од тела је F [2п].

б) Корак 1: Пошто је коефицијент трења између нити и тела много већи него између тела и стола, канап не може да проклиза пре него што тело почне да се креће и проблем се своди на мировање тела T . Услов да је висина тела h много мања од његове дужине d обезбеђује ротациону стабилност тела. Ако је максимална сила граница да се тело не заротира око крајње десне тачке тада би сила реакције N деловала у тој тачки. Услов да нема ротације око крајње десне тачке је да је сума момената сила једнака нули. Момент силе $F_{max} \frac{\sqrt{2}}{2} h$ је много мањи од момента супротног смера чији је доминантни допринос $mg \frac{\sqrt{2}}{2} d$, па сила реакције N не може деловати у крајњој тачки већ у некој унутрашњој. Обратно, када је сила минимална услов да нема ротације око крајње леве тачке је испуњен јер је момент силе $mg \frac{\sqrt{2}}{2} h$ много мањи од момента супротног смера чији је доминантни допринос $F_{min} \frac{\sqrt{2}}{2} d$.

Да би тело T мировало сума спољашњих сила које делују на тело мора бити једнака нули. На тело T делују силе затезања нити са леве и десне стране, сила нормалне реакције и сила статичког трења. Када се нит повлачи силом најмањег интензитета F_{min} , на тело T делује максимално статичко трење на десно (Слика 2). Једначина равнотеже за тело T у хоризонталном правцу је $F_{min} \sin \alpha + F_{tr1} = F_z \sin \alpha$, односно са замењеном вредношћу угла α : $F_{min} \frac{\sqrt{2}}{2} + F_{tr1} = F_z \frac{\sqrt{2}}{2}$ [2п]. Из једначине равнотеже у вертикалном правцу, $N_1 = F_z \cos \alpha + F_{min} \cos \alpha = (F_z + F_{min}) \frac{\sqrt{2}}{2}$, одређујемо силу N_1 , па је сила трења $F_{tr1} = \mu N_1 = \mu (F_z \cos \alpha + F_{min} \cos \alpha) = \mu \frac{\sqrt{2}}{2} (F_z + F_{min})$ [2п]. Заменом вредности силе трења у једначину за равнотежу у хоризонталном правцу, добијамо $\frac{F_z}{F_{min}} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$ [2п].

Корак 2: Када се нит повлачи силом највећег интензитета F_{max} , на тело T делује максимално статичко трење на лево (Слика 3). Једначина равнотеже за тело T у хоризонталном правцу је $F_{max} \sin \alpha - F_{tr2} = F_z \sin \alpha$, односно са замењеном вредношћу угла α : $F_{max} \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{tr2} = F_z \frac{\sqrt{2}}{2}$ [2п]. Из једначине равнотеже у вертикалном правцу, $N_2 = F_z \cos \alpha + F_{max} \cos \alpha = (F_z + F_{max}) \frac{\sqrt{2}}{2}$, одређујемо силу N_2 , па је сила трења $F_{tr2} = \mu N_2 = \mu \frac{\sqrt{2}}{2} (F_z + F_{max})$ [2п]. Заменом вредности силе трења у једначину за равнотежу у хоризонталном правцу, добијамо $\frac{F_{max}}{F_z} = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}$ [2п].

Корак 3: Комбиновањем једначина које повезују максималну односно минималну вредност силе F са силом затезања F_z добијамо $m = F_z/g = \sqrt{F_{min} F_{max}/g}$ [3п].

3. а) Корак 1: Пошто нема трења између нафте и ваљка, онда нафта не ротира и не доприноси моменту инерције [3п]. Ваљак је хомоген и занемарљиве дебљине па је површинска густина масе $\sigma = \frac{m - m_n}{P}$ [0,5п], где је површина ваљка $P = 2\pi Rh + 2\pi R^2$ [0,5п].

Корак 2: Основа ваљка је диск полупречника R , његова маса је $m_d = \sigma R^2 \pi$ [0,5п] а момент инерције $I_d = \frac{1}{2} m_d R^2$ [0,5п], одакле следи $I_d = (m - m_n) \frac{R^3}{4(h+R)}$ [0,5п].

Корак 3: Маса омотача је $m_o = \sigma 2\pi Rh$ [0,5п], а момент инерције је $I_o = m_o R^2$ [0,5п], одакле се добија $I_o = (m - m_n) \frac{R^2 h}{h+R}$ [0,5п]. Укупан момент инерције је $I = I_o + 2I_d$ [0,5п], $I = (m - m_n) \frac{R^2 (R+2h)}{2(h+R)}$ [0,5п].

б) Корак 1: Пројекције другог Њутновог закона на хоризонталу за квадар и ваљак су $Ma = N_2$ [1п] и $ma = F_{tr1} - N_2$ [1п], где је сила трења између бурета и подлоге $F_{tr1} = \mu N_1$ [1п]. Сила трења између бурета



I разред

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА – А КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
9. мај 2026.

и квадрата је $F_{\text{tr}2} = \mu N_2$ [1п]. Из услова да нема убрзања бурета по вертикали добијамо $N_1 = mg - F_{\text{tr}2}$ [1п]. Решавањем система једначина се добија убрзање $a = \frac{\mu mg}{m+(1+\mu^2)M}$ [1п] и силе реакција $N_1 = \frac{m(m+M)g}{m+(1+\mu^2)M}$ [0,5п] и $N_2 = \frac{\mu m M g}{m+(1+\mu^2)M}$ [0,5п].

Корак 2: Други Њутнов закон за ротацију бурета гласи $I\alpha = (F_{\text{tr}1} + F_{\text{tr}2})R$ [1п]. Заменом израза за силе трења, убрзање a и силе реакција N_1 и N_2 се добија угаоно убрзање $\alpha = \frac{\mu mg R(m+(1+\mu)M)}{I(m+(1+\mu^2)M)}$ [1п].

Корак 3: Угаона брзина се мења са временом на следећи начин $\omega = \omega_0 - \alpha t$ [0,5п], док је брзина дата са $v = \omega R$ [0,5п]. Проклизивање престаје када $v = \omega R$ [0,5п] и тада сила трења $F_{\text{tr}1}$ и сила реакције N_2 падају на нулу, самим тим квадар и центар бурета настављају да се крећу константном брзином. Из претходних једначина се добија време за које престаје проклизавање $t = \frac{\omega_0 R}{a + \alpha R}$ [0,5п]. Заменом вредности за a и α добија се $t = \frac{\omega_0 R I(m+(1+\mu^2)M)}{\mu mg(I+R^2(m+(1+\mu)M))}$ [0,5п] и коначно успостављена брзина $v = \frac{\omega_0 R I}{I+R^2(m+(1+\mu)M)}$ [0,5п].

4. Корак 1: Изаберимо део штапа дужине x мерено од слободног краја штапа (Слика 5), а пошто је x произвољно резултати важе за сваку тачку на штапу. Силе које делују на део штапа су сила затезања у тачки x , $T(x)$ паралелно штапу, сила смицања у тачки x , $S(x)$ нормално на штап и гравитациона сила на тај део штапа, F_x дуж вертикале на доле [2п]. Пошто је штап хомоген $F_x = \frac{x}{l}mg$ [2п]. Компонента гравитационе силе паралелна штапу је $F_p = \frac{x\sqrt{3}}{2l}mg$ [1п], а нормална на штап $F_n = \frac{x}{2l}mg$ [1п]. Захтев за статичност је да је сума сила дуж сваке осе нула $T(x) - F_p = 0$ [2п] и $S(x) - F_n = 0$ [2п] одакле следи $T(x) = \frac{x\sqrt{3}}{2l}mg$ [1п] и $S(x) = \frac{x}{2l}mg$ [1п].

Корак 2: Центар масе дела штапа дужине x је на средини, па је крак силе $d = \frac{x}{2}$ [2п]. Сила која ствара спољни момент је нормална компонента силе F_n [2п]. Момент гравитационе силе у тачки x је $M_g(x) = F_n d$ [1п]. Из услова статичности следи да сума момената сила мора бити нула $M_g(x) - M(x) = 0$ [2п], самим тим унутрашњи момент силе је једнак по интензитету моменту гравитационе силе $M(x) = \frac{x^2}{4l}mg$ [1п].

5. Корак 1: Једначина кретања возила на врху брда је $ma_n = \frac{mv^2}{R} = mg - N$ [1п], где је $N = F$ сила коју мери сензор. Зависност силе F од квадрата брзине возила је линеарна: $F(v^2) = av^2 + b$, где је нагиб $a = -\frac{m}{R}$, а одсечак на y -оси $b = mg$ [1п]. Са графика зависности $F(v^2)$ могу се одредити параметри a и b и даље маса возила као: $m = b/g$ [1п] и радијус кривине брда у највишој тачки као $R = -\frac{b}{ag}$ [1п].

Корак 2: У табели (Табела 1) су дате вредности за v , v^2 , Δv^2 и F , док је грешка мерења силе иста за све експерименталне тачке $\Delta F = 0,01 \text{ kN}$. Грешка величине v^2 рачуна се по формули $\Delta v^2 = 2v\Delta v$ [0,5п]. Код сваког мерења, тачно израчунате вредности за v^2 и Δv^2 бодовати са [0,25п].

$v[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$	$v^2[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}]$	$\Delta v^2[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}]$	$F[\text{kN}]$
6,0	36	3	9,17
8,0	64	4	8,66
10,0	100	4	8,02
12,0	144	5	7,26
14,0	196	6	6,27
16,0	256	7	5,14

Табела 1

График зависности $F(v^2)$ дат је на слици (Слика 6). Правилно обележене осе са размером бодовати са по [0,5п]. Сваку тачно унету експерименталну тачку бодовати са по [0,5п]. Коректно изабрану праву која пресеца све експерименталне тачке у опсегу њихових грешака бодовати са [0,5п].

Корак 3: На уцртаној правој линеарне зависности $F(v^2)$ изабрати две тачке (А и В) тако да се прва тачка налази између прве две експерименталне тачке, а друга тачка између последње две експерименталне тачке. Координате тачака су: $A = (x_A, y_A) = (40 \text{ m}^2/\text{s}^2, 9,10 \text{ kN})$, $B = (x_B, y_B) = (250 \text{ m}^2/\text{s}^2, 5,30 \text{ kN})$. Правилно изабране тачке и очитане координате бодовати са по [0,5п] за сваку тачку. Грешка за координату тачке одређује се као максимум од најмањег подеока на графику и грешака суседних тачака. У конкретној размери најмањи подеоци имају вредности $1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ за x -осу и $0,025 \text{ kN}$ за y -осу, па су грешке очитатних координата: $\Delta x_A = 4 \text{ m}^2/\text{s}^2$, $\Delta y_A = 0,10 \text{ kN}$, $\Delta x_B = 7 \text{ m}^2/\text{s}^2$ и $\Delta y_B = 0,10 \text{ kN}$. Сваку тачно одређену грешку бодовати са [0,25п].



I разред

Друштво физичара Србије и
Министарство просвете Републике Србије
РЕШЕЊА – А КАТЕГОРИЈА

ДРЖАВНИ НИВО
9. мај 2026.

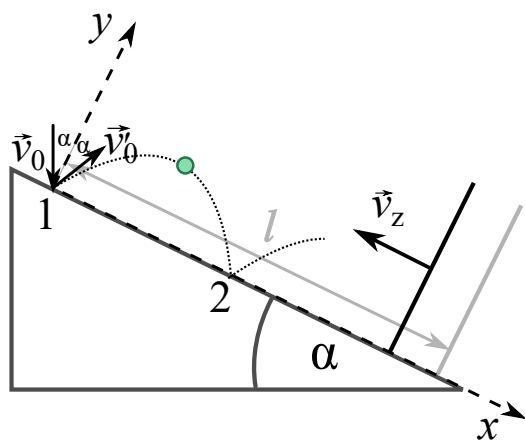
Корак 4: Коефицијент правца линеарне зависности добија се по формули: $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -18,09 \text{ kg/m}$ [0,5п], а релативна грешка коефицијента правца као: $\delta a = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} = 10,50\%$. Апсолутна грешка коефицијента правца је $\Delta a = |a|\delta a = 1,90 \text{ kg/m}$ [0,5п].

Вредност одсечка на y -оси се директно читава са графика $b = 9,82 \text{ kN}$ [0,5п]. За грешку одсечка на y -оси Δb узима се максимум од грешке појединачног мерења силе и најмањег подеока на графику, $\Delta b = 0,10 \text{ kN}$ [0,5п].

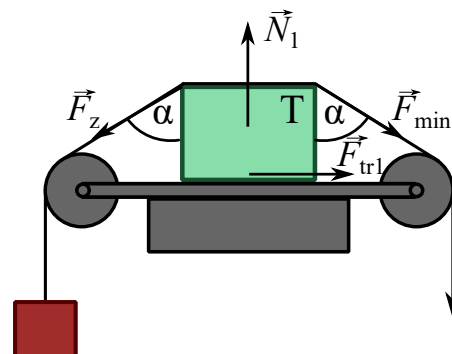
Корак 5: Из добијене вредности параметра b рачунамо масу возила $m = \frac{b}{g} = 1001,1 \text{ kg}$ [0,5п]. Апсолутна грешка масе возила је $\Delta m = \frac{\Delta b}{g} = 10,2 \text{ kg}$ [0,5п]. Коначни резултат за масу возила је $m = (1001 \pm 11) \text{ kg}$ [1п].

Радијус кривине врха брда рачуна се као $R = -\frac{b}{ag} = 54,94 \text{ m}$ [0,5п]. Релативна грешка величине R је $\delta R = \delta a + \delta b = 11,52\%$, па је апсолутна грешка радијуса кривине врха брда $\Delta R = R\delta R = 6,37 \text{ m}$ [0,5п]. Коначни резултат за радијус кривине врха брда је $R = (55 \pm 6) \text{ m}$ [1п].

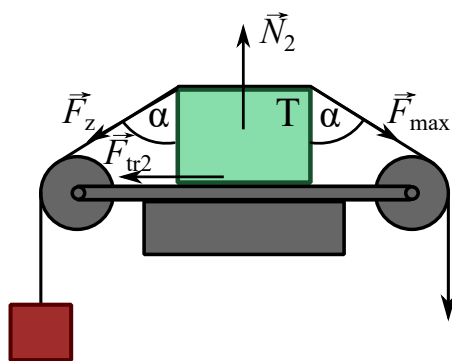
Напомене: Код бодовања коначних резултата, признавати само правилно мајориране грешке и заокружене вредности на исти број значајних цифара. Код мајорирања грешака, признавати и резултате у којима је апсолутна грешка код које је прва значајна цифра 1 представљена са само једном значајном цифром.



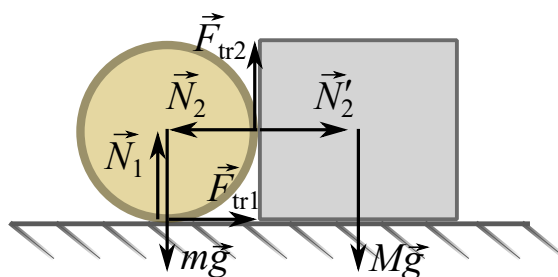
Слика 1



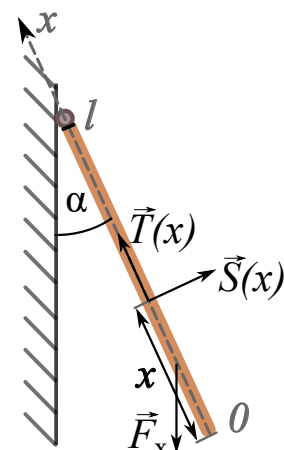
Слика 2



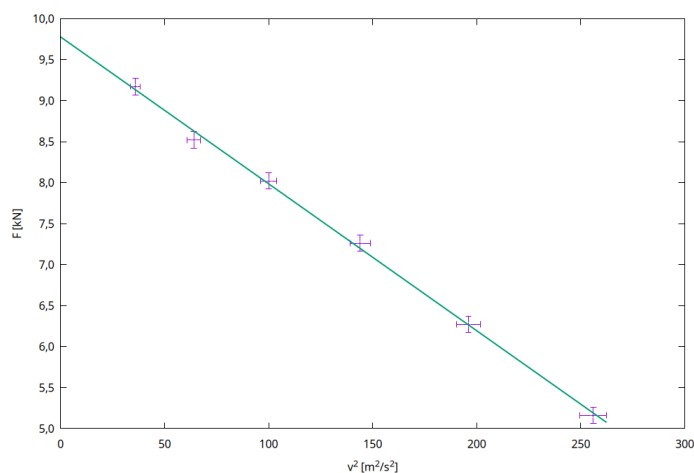
Слика 3



Слика 4



Слика 5



Слика 6: Сила којом возило притиска подлогу у функцији квадрата брзине возила