



I  
РАЗРЕД

Друштво физичара Србије  
Министарство просвете, науке и технолошког  
развоја Републике Србије  
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ОПШТИНСКИ НИВО  
04.02.2023.

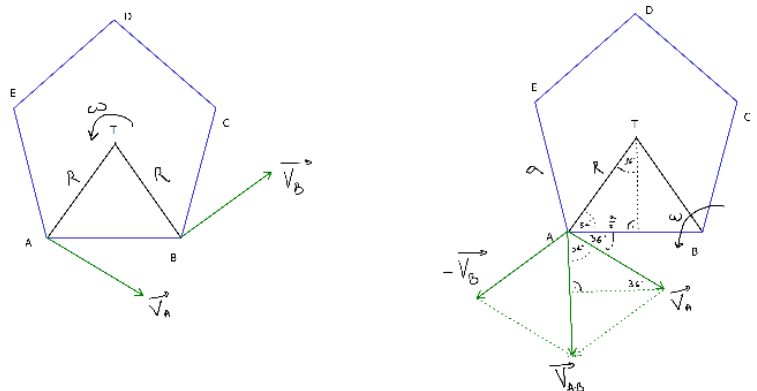
1. Нека је лопта бачена брзином  $\vec{v}_l$  чије су хоризонтална компонента  $v_{lx}$  и вертикална компонента  $v_{ly}$ . Јанко је на растојању  $d$  од Мирка, а дужина терена је  $D$ . Пошто је Јанко лопту ухватио тачно испод коша, прешао је пут  $D - d$  за време лета лоптекоје износи  $t = \frac{D-d}{v_0} = 2.4 \text{ s}$  [3п]. Дуж  $x$  осе лопта се кретала константном брзином  $v_{lx} = \frac{D}{t} = 11.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [4п]. Дуж  $y$  осе лопта се кретала равномерно успорено до заустављања, а затим равномерно убрзано док се поново није нашла на истој висини са које је бачена. Времена потребна да се лопта заустави ( $t'$ ) и да се врати на почетну висину ( $t''$ ) су једнака што значи да је  $t' = t'' = \frac{t}{2} = 1.2 \text{ s}$  [6п]. Из услова заустављања лопте  $0 = v_{ly} - gt'$  [3п] добијамо тражену вертикалну компоненту брзине  $v_{ly} = \frac{g(D-d)}{2v_0} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  [2п].

$$\text{Брзина којом је Мирко бацио лопту је } v_l = \sqrt{v_{lx}^2 + v_{ly}^2} = \sqrt{\frac{g^2(D-d)^2}{4v_0^2} + \frac{D^2v_0^2}{(D-d)^2}} = 16.74 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ [1п+1п].}$$

2. **Прво решење:** Темена  $A$  и  $B$  се налазе на једнаком растојању  $R$  од тежишта  $T$ . У референтном систему у коме тачка  $T$  мирује, брзине темена  $A$  и  $B$  су једнаке и износе  $v_A = v_B = \omega \cdot R$  [4п]. Важно је уочити да је један од углова који вектор брзине гради са страницом у истом темену једнак  $36^\circ$  [2п]. Обележимо брзину темена  $A$  у односу на референтни систем везан за теме  $B$  са  $\vec{v}_{AB}$ . Веза између брзина у ова

два референтна система је  $\vec{v}_A = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_B$  односно  $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$  [2п]. У

паралелограму који образују вектори  $\vec{v}_A$  и  $-\vec{v}_B$  можемо уочити да је угао између вектора брзине и дуже дијагонала једнак  $54^\circ$  [2п]. На основу сличности троуглова видимо да важи однос  $\frac{a}{R} = \frac{v_{AB}}{v_A}$  [7п] одакле следи тражена брзина  $v_{AB} = \omega \cdot a$  [1п].



Слика уз решење задатка 2.

**Друго решење:** Гледан из

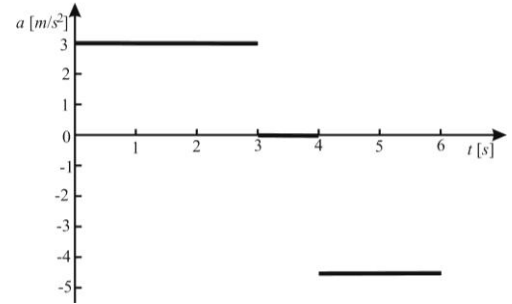
система везаног за теме  $B$ , тежиште  $T$  око темена  $B$  ротира константном угаоном брзином  $\omega$  [5п]. Истом угаоном брзином ротира и теме  $A$  које се налази на растојању  $a$  од темена  $B$ . Због тога је тражена брзина  $v_{AB} = \omega \cdot a$  [13п].

**Напомена:** правилно скициран вектор са јасно назначеним углом у односу на страницу носи [2п].

3. Уколико је брзина чамца у односу на реку  $v$ , а брзина реке  $u$  онда је брзина чамца у односу на обалу, када се креће низводно  $v_n = v + u$  [1п], а када се креће узводно  $v_u = v - u$  [1п]. Најлакше је прећи у референтни систем везан за брод  $A$ , који се у односу на обалу креће брзином  $v_A$ . Тада су брзине чамца у односу на брод  $A$  при кретању низводно  $v_n = v + u - v_A$  [2п], а при кретању узводно  $v_u = v + u + v_A$  [2п]. За време  $t_1$  чамац стигне од брода  $A$  до брода  $B$ , чије је почетно растојање  $d$  и при томе важи  $(v_n - v_0)t_1 = d$  (1) [2п] и  $d_1 = d + v_0t_1$  (2) [2п], где је  $d_1$  растојање између бродова у тренутку када је чамац стигао до брода  $B$ . За време  $t_2$  чамац се врати до брода  $A$  и при томе важи  $v_u t_2 = d_1$  (3) [2п] и  $d_2 = d_1 + v_0t_2$  (4) [2п]. Комбинујући једначине (2) и (4), уз услове дате у задатку да је  $d_2 = nd$  и  $t_2 = nt_1$  [1п] добија се  $(n-1)d = (n+1)v_0t_1$  (5). Уз исте услове једначине (1) и (3) постају  $(v + u - v_A)t_1 = d + v_0t_1$  (6) и  $n \cdot (v - u + v_A)t_1 = d + v_0t_1$  (7). Множећи једначину (6) са  $n$ , сабирајући са (7) и мењајући време  $t_1$  из једначине (5) долазимо до тражене брзине  $v = v_0 \frac{n+1}{n-1}$  [5п].



4. Тражени интервал обухвата три дела пута. У интервалу времена  $(2s, 3s)$  тело се кретало равномерно убрзано са почетном брзином  $v_1 = 6 \frac{m}{s}$  током времена  $\Delta t_1 = 3s - 2s = 1s$  и променило је брзину за  $\Delta v_1 = 9 \frac{m}{s} - 6 \frac{m}{s} = 3 \frac{m}{s}$ . Убрзање на првом делу пута је  $a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = 3 \frac{m}{s^2}$  [2п], а пређени пут  $s_1 = v_1 \Delta t_1 + \frac{a_1 (\Delta t_1)^2}{2} = 7.5m$  [2п]. У интервалу времена  $(3s, 4s)$  тело се кретало са константном брзином  $v_2 = 9 \frac{m}{s}$  током времена  $\Delta t_2 = 4s - 3s = 1s$ . Како нема промене брзине  $\Delta v_2 = 0$  нема ни убрзања на другом делу пута  $a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} = 0$  [2п], а пређени пут је  $s_2 = v_2 \Delta t_2 = 9m$  [2п]. У интервалу времена  $(4s, 5s)$  тело је успоравало са почетном брзином  $v_3 = 9 \frac{m}{s}$  током времена  $\Delta t_3 = 5s - 4s = 1s$  променивши брзину за  $\Delta v_3 = 4.5 \frac{m}{s} - 9 \frac{m}{s} = -4.5 \frac{m}{s}$ . Убрзање на трећем делу пута је  $a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} = -4.5 \frac{m}{s^2}$  [2п], а пређени пут је  $s_3 = v_3 \Delta t_3 + \frac{a_3 (\Delta t_3)^2}{2} = 6.75m$  [2п]. Средња брзина је укупни пређени пут  $s_u = s_1 + s_2 + s_3 = 23.25m$  подељен укупним протеклим временом  $\Delta t_u = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 3s$  односно  $v_{sr} = \frac{s_u}{\Delta t_u} = 7.75 \frac{m}{s}$  [2п]. Средње убрзање је укупна промена брзине  $\Delta v_u = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = -1.5 \frac{m}{s}$  подељена укупним протеклим временом  $\Delta t_u$  и износи  $a_{sr} = \frac{\Delta v_u}{\Delta t_u} = -0.5 \frac{m}{s^2}$  [2п+1п] (1 поен који се односи на средње убрзање носи чињеница да тело просечно успорава). Напомена: исправно нацртан график носи [3п].



5. Петрова угаона брзина је константна и износи  $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$ , а време потребно да изађе из кривине је  $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi R_1}{2v_1}$  (1) [1п]. Исто је време потребно Маши да изађе из кривине равномерно убрзавајући угаоним убрзањем  $\alpha$ , са почетном брзином  $\omega_{20}$  те важи  $\omega_{20} t_1 + \frac{\alpha t_1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$  (2) [2п]. До тренутка  $t_2$ , када је Маша стигла до половине кривине, пребрисала је угао  $\frac{\pi}{4} = \omega_{20} t_2 + \frac{\alpha t_2^2}{2}$  [2п], а угаона брзина јој је износила  $\omega_2 = \omega_{20} + \alpha t_2$  [2п]. Комбинујући ове две релације долази се до познате релације  $\omega_2^2 - \omega_{20}^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \frac{\pi}{4}$  (3). Како је угао између вектора укупног убрзања и вектора брзине исти као и угао између вектора укупног и тангенцијалног убрзања јасно је да је однос дат у задатку управо  $\tan 72.33^\circ = \frac{a_n}{a_t}$  односно да важи  $\omega_2^2 = \alpha \pi$  (4) [5п]. Једначине (3) и (4) доводе до релације  $\omega_{20}^2 = \frac{\alpha \pi}{2}$  (5). Једначине (1), (2) и (5) доводе до квадратне једначине по  $\alpha$  која гласи  $\alpha^2 - \alpha \cdot \frac{16v_1^2}{\pi R_1^2} + \frac{16v_1^4}{\pi^2 R_1^4} = 0$  [5п] уз услова  $\pi R_1^2 < 4v_1^2$  (\*) [1п]. Решења ове једначине су  $\alpha_{1,2} = (2 \pm \sqrt{3}) \cdot \frac{4v_1^2}{\pi R_1^2}$  [1п]. Физичко решење је  $\alpha = (2 - \sqrt{3}) \cdot \frac{4v_1^2}{\pi R_1^2}$  [1п], задовољава услов (\*). Напомена: једначина се врло лако може напаковати на облик  $(2\alpha - \frac{4v_1^2}{\pi R_1^2})^2 - 3\alpha^2 = 0$  одакле следе пронађена решења.

Члановима комисије желимо успешан рад и пријатан дан!