I

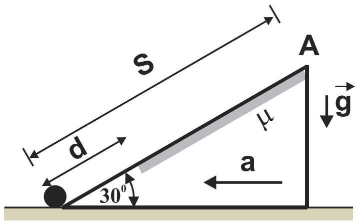
РАЗРЕД

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Друштво Физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије
ЗАДАЦИ – бозонска категорија

БЕОГРАД
13 - 14. 4. 2013.

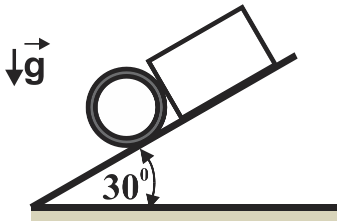
1. На хоризонталној подлози се налази призма нагибног угла α=30° и дужине стрме равни S=5 m. У дну стрме равни се налази хомогена куглица која је у контакту са призмом (слика 1). У почетном тренутку тела мирују, а потом се призма почне кретати по хоризонталној подлози налево равномерним убрзањем a=10 m/s^2. На почетном делу стрме равни, дужине d=1 m, између куглице и призме нема трења, а на преосталом делу равни коефицијент трења између ова два тела је μ=0,2. Смер кретања куглице у односу на призму се не мења од почетка до краја кретања по њој. Током ротације куглице њена оса ротације не мења правац. Куглица је све време кретања у контакту са стрмом равни. Одредити интензитет брзине куглице, у односу на призму, у тренутку одвајања од ње (тачка A на слици 1). За убрзање Земљине теже узети g=9,81 m/s^2.



Слика 1.

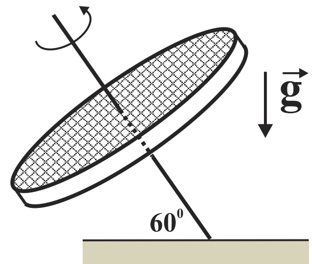
(25п)

2. Хомогени шупљи цилиндар масе m_1 и блок масе m_2 се крећу низ стрму раван нагибног угла α=30° (слика 2). Коефицијент трења између блока и стрме равни је η, а између цилиндра и блока је μ. Цилиндар се котрља без проклизавања и оса ротације цилиндра током кретања остаје у истој равни не мењајући свој правац. Одредити убрзање тела у односу на подлогу ако су тела све време кретања међусобно у контакту и у контакту са стрмом равни.
Подсетник: *Момент инерције шупљег цилиндра у односу на централну осу симетрије је* $I = mR^2$ **(20п)**



Слика 2.

3. Диск полупречника R може да ротира око фиксне осе која пролази кроз центар диска и заклапа угао α=60° са хоризонталном подлогом (слика 3). На површини диска се налазе хомогено распоређени опиљци гвожђа (сматрати да су опиљци хомогени и једнаких димензија). Коефицијент трења између опиљака и површине диска је μ. Којом константном угаоном брзином треба да ротира диск да би η процената опиљака склизнуло са диска. Сматрати да опиљци међусобно не интерагују.

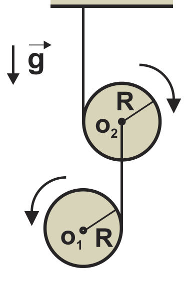


Слика 3.

(15п)

4. У систему на слици 4 су приказана два нехомогена цилиндра, сваки масе m и полупречника R, на које су намотане одговарајуће нити. Момент инерције сваког цилиндра у односу на своју хоризонталну осу ротације (тачке O_1 и O_2 на слици 4) износи I. Сматрати да су нити намотане на цилиндре неистегљиве, као и да се њихова маса може занемарити. Ако је систем почео да се креће из стања мировања, одредити интензитет убрзања горњег цилиндра у односу на непокретну подлогу. Сматрати да су нити у сваком тренутку у вертикалном положају и да нема проклизавања нити. Занемарити силе трења у систему.

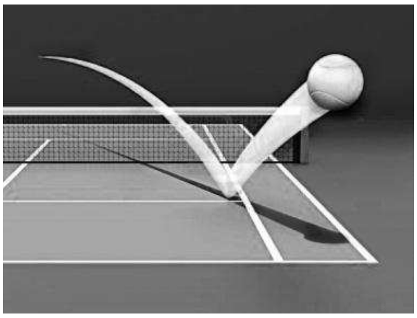
(20п)



Слика 4.

5. Данас се у многим професионалним спортовима, а посебно у тенису, користи Hawk-Eye (око соколово) систем за прецизно праћење трајекторије лоптице. Овај систем су 2001. године развили Пол Хокинс и Дејвид Шери у Великој Британији, а данас је власништво компаније Sony. За разлику од линијских судија овај систем је много прецизнији и објективнији па значајно помаже главном судији да донесе исправну одлуку. Систем користи неколико веома брзих камера које из различитих углова снимају кретање лоптице, а помоћу моћног рачунара се анализом снимљених слика прорачунавају све физичке величине неопходне за реконструкцију трајекторије тениске лоптице. Тренутни положај лоптице се одређује помоћу једноставног геометријског модела триангулације који је био познат филозофима још у доба античке Грчке. На слици 5 је приказана једна тако реконструисана трајекторија тениске лоптице.

У мечу Davis Cup такмичења између репрезентација Србије и USA маестралном игром наш дубл Зимоњић-Бозољац је победио тренутно најбољи дубл на свету браћу Брајане. У том мечу наши репрезентативци су имали одличан сервис који им је помогао да дођу до победе.


Слика 5.

Имајући у виду да у реалној ситуацији на кретање лоптице утичу многи фактори, (временски услови, брзина и правац ветра, спин лоптице, председник Комисије за такмичење који скупља лоптице итд.) на основу неколико снимљених слика лоптице могу се проценити основне карактеристике једног сервис ударца.

У Табели 1 су приказане координате положаја лоптице у појединим тренуцима времена након сервиса Илије Бозољца. Почетни тренутак је тренутак сервиса. Ако се претпостави да се лоптица креће у вертикалној равни са константним успорењем на основу датих података може се проценити интензитет почетне брзине лоптице приликом сервиса, као и интензитет њеног успорења. Да би то урадили потребно је:

а) нацртати зависност интензитета укупне брзине лоптице од времена
б) графичком методом одредити успорење и почетну брзину лоптице. Пошто су грешке мерених величина занемарљиве, проценити грешке за почетну брзину и убрзање лоптице на основу грешака приликом очитавања одговарајућих вредности са графика.

Табела 1.

t [s]	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
x [m]	2,462	4,900	7,304	9,679	12,024	14,341	16,629
y [m]	2,210	2,060	1,810	1,533	1,239	0,924	0,583

Напомена:
Није потребно нумерички рачунати грешке за брзину лоптице.

(20п)

Задатке припремили:
др Зоран Мијић, Институт за физику, Београд
Зоран Поповић, Физички факултет, Београд

Рецензент:
др Невена Пуач, Институт за физику, Београд

Председник Комисије за такмичење ученика средњих школа:
др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

I
РАЗРЕД

Друштво **Физичара Србије**
Министарство просвете, науке и технолоштког развоја
Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – бозонска категорија

БЕОГРАД
13 - 14. 4. 2013.

P1. Кретање куглице можемо поделити у три етапе: кретање без котрљања на делу равни без трења, кретање са проклизавањем на делу пута са трењем и кретање куглице без проклизавања у тренутку када се транслаторна брзина центра куглице изједначи са тангенцијалном брзином. У систему везаном за призму на куглицу масе m делује инерцијална сила $\vec{F}_a = -m\vec{a}$ **(1п).** Једначине кретања куглице у систему везаном за призму на делу равни без трења су: $X: ma_1 = \frac{ma\sqrt{3}}{2} - \frac{mg}{2}$, $Y: 0 = N - \frac{mg\sqrt{3}}{2} - \frac{ma}{2}$ **(3п)**. Из датих једначина налази се убрзање куглице на почетном делу равни, без трења и оно износи $a_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{g}{2} = 3.755\frac{m}{s^2}$ **(1п)**. У тренутку доласка куглице до места на ком почиње деловати сила трења, њена брзина износи $v_1 = \sqrt{2a_1 d} = \sqrt{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{g}{2}\right)d} = 2.741\frac{m}{s}$ **(1п).** Време кретања куглице без котрљања је $t_1 = \frac{v_1}{a_1} = 0.73\ s$ **(1п)**.

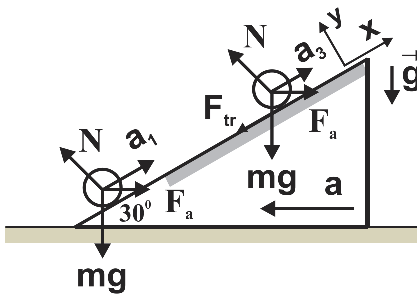
Након преласка са глатког на део равни на ком постоји трење између куглице и призме, куглица се неко време (t_2) креће са проклизавањем. Једначине транслаторног кретања куглице на овом делу стрме равни су: $X: ma_2 = \frac{ma\sqrt{3}}{2} - \frac{mg}{2} - F_{tr}$ **(1п)** $Y: 0 = N - \frac{mg\sqrt{3}}{2} - \frac{ma}{2}$ **(1п)** $F_{tr} = N\mu = m\left(\frac{g\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right)\mu$ **(1п)**. Из ових једначина се налази транслаторно убрзање куглице у односу на призму

$a_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{g}{2} - \mu\left(\frac{g\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right) = 1.056\frac{m}{s^2}$ **(1п).** Из једначине за ротацију куглице $rF_{tr} = I\alpha$ **(1п)**

(r је полупречник, $I = 2mr^2/5$ момент инерције куглице) се добије формула за угаоно убрзање куглице $\alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu}{r}\left(\frac{g\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right)$ **(1п)**. Куглица ће се почети кретати без проклизавања након времена t_2 од почетка кретања по храпавом делу равни, када се интензитет тангенцијалне брзине тачке куглице која је у контакту са равни изједначи са транслаторном брзином центра куглице $v_{tan}(t_2) = v_{tran}(t_2)$ **(1п)** при чему су

$v_{tan}(t_2) = \omega(t_2)r = (\omega_0 + \alpha t_2)r = \alpha t_2 r,\ (\omega_0 = 0)$,

$v_{tran}(t_2) = v_1 + a_2 t_2$ **(1п)**. Време кретања куглице по храпавом делу равни са проклизавањем добије се из датих једначина $t_2 = \frac{v_1}{r\alpha - a_2} = \frac{v_1}{\left(\frac{g\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2}\right)5\mu/2 - a_2} = 0.481s$ **(2п)**.



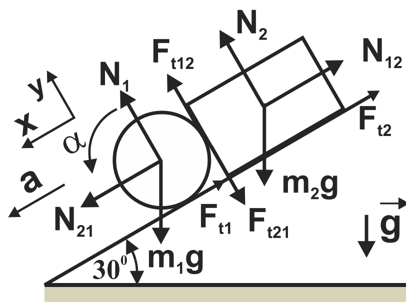
Слика 1.

Пут који куглица пређе на стрмој равни проклизавајући је $l = v_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2} = 1.442m$ **(1п)**.

Од почетка кретања на стрмој равни до почетка кретања без проклизавања, куглица на стрмој равни пређе пут од $d + l = 1.442m$ **(1п)**, а њена брзина у том тренутку у односу на стрму раван је $v_2 = v_1 + a_2 t_2 = 3.249\ m/s$ **(1п)**.

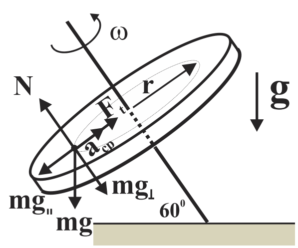
Једначине транслаторног и ротационог кретања куглице на делу пута, на ком се креће без проклизавања, у систему везаном за призму су: $ma_3 = \frac{ma\sqrt{3}}{2} - \frac{mg}{2} - F_{tr0}$, **(1п),** $rF_{tr0} = I\alpha$ **(1п)**. Из ових једначина се елиминише F_{tr0}, сила трења током котрљања без проклизавања која износи $F_{tr0} = \frac{2}{5}ma_3$ **(1п).** Потом се нађе убрзање куглице у односу на стрму раван на делу где се креће без проклизавања $a_3 = \frac{5}{7}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{g}{2}\right) = 2.682\ \frac{m}{s^2}$ **(1п)**. Брзина куглице у односу на призму у тренутку одвајања од ње је $v_3 = \sqrt{v_2^2 + 2a_3(S - d - l)} = 4.927\frac{m}{s}$ **(1п)**.

Р2. На слици су приказане силе које делују у систему. Једначина која описује транслаторно кретање цилиндра дуж x осе је $m_1 a = \frac{m_1 g}{2} + N_{21} - F_{t1}$ **(2п)** док за ротационо кретање важи $I\alpha = (F_{t1} - F_{t21})R$ **(2п)** при чему је сила трења између цилиндра и блока $F_{t21} = F_{t12} = \mu N_{12}$ **(2п)** где су $N_{21} = N_{12}$ силе нормалних реакција између цилиндра и блока, а F_{t1} сила трења између цилиндра и подлоге. Како нема проклизавања цилиндра следи $a = \alpha R$ **(2п)**, а из услова да су тела све време кретања у контакту следи да су им убрзања иста $a = a_1 = a_2$. Једначине кретања блока су: $m_2 a = \frac{m_2 g}{2} - N_{12} - F_{t2}$ **(2п)** и $N_2 - \frac{m_2 g\sqrt{3}}{2} + F_{t12} = 0$ **(2п)** при чему је сила трења између блока и равни $F_{t2} = \eta N_2$ **(2п)**. Решавањем система претходних једначина после дужег рачуна за тражено убрзање се налази $a = g\frac{m_1(1-\mu\eta)+m_2(1-\sqrt{3}\eta)(1-\mu)}{2m_2(1-\mu)+4m_1(1-\mu\eta)}$ **(6п)**.



Слика 2.

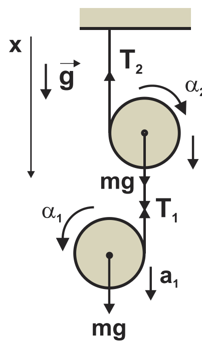
Р3. Посматрајмо један опиљак масе m (према услову задатка сви опиљци су једнаки) који се налази на растојању r од осе ротације и ротира заједно са диском (слика 3). Једначина кретања тог опиљка је $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_t}$ **(2п)** где, је N нормална реакција подлоге, и F_t сила трења између опиљка и површине диска. У равни диска важи $m\overrightarrow{a_n} = m\vec{g}_{\parallel} + \overrightarrow{F_{tr}}$ **(2п)** gde је $a = \omega^2 r$ центрипетално убрзање, док за кретање дуж правца осе ротације важи $0 = m\vec{g}_{\perp} + \vec{N}$ **(2п)**. Вектори силе трења, центрипеталне силе и паралелна компонента $m\vec{g}_{\parallel}$ леже у равни диска, док су силе $\vec{N}$ и $m\vec{g}_{\perp}$ нормалне на њу при чему је $mg_{\parallel} = mg/2$, а $mg_{\perp} = mg\sqrt{3}/2$. У тренутку када опиљак почне да пада са диска на њега делује сила трења клизања која износи $F_{tr} = \mu N$ при чему је $N = mg_{\perp} = mg\sqrt{3}/2$. Положај опиљка на диску за који је сила трења максимална се налази на доњем делу диска (слика 3) за који једначина кретања гласи $ma_n = F_{tr} - mg_{\parallel}$ **(2п)**. За овај положај је потребна најмања угаона брзина окретања диска да би дошло до падања опиљака. За све друге положаје на диску да би уопште дошло до падања опиљака са диска потребна је већа угаона брзина због међусобне оријентације вектора сила које делују на појединачни опиљак. Сила трења клизања је $F_t = \mu N = \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mg$ па се за критичну вредност угаоне брзине диска при којој долази до одвајања (клизања) опиљка налази $\omega_k = \sqrt{\frac{g(\mu\sqrt{3}-1)}{2r}}$ **(2п)**. Пошто су опиљци равномерно распоређени по површини дикса, важи $\eta = \frac{(R^2-r_k^2)\pi}{R^2\pi}$ **(3п)** одакле се налази критични полупречник $r_k = R\sqrt{1-\eta}$ при којем спадне η процената опиљака. Коначно тражена угаона брзина је $\omega = \sqrt{\frac{g(\mu\sqrt{3}-1)}{2R\sqrt{1-\eta}}}$ **(2п)**.



Слика 3.

Напомена: Очигледно мора да важи $\mu > 1/\sqrt{3}$

Р4. На слици 4 су приказане релевантне силе које делују у систему, као и претпостављени смерови кретања цилиндара. Једначина транслаторног кретања доњег цилиндра је $ma_1 = mg - T_1$ **(2п)** док је ротација цилиндра око своје осе описана једначином $I\alpha_1 = T_1 R$ **(2п)**. За горњи цилиндар важи једначина кретања $ma_2 = mg + T_1 - T_2$ **(2п)**, и ротације $I\alpha_2 = T_2 R$ **(2п).** Како нема проклизавања конца веза између угаоног и транслаторног убрзања горњег цилиндра је $a_2 = \alpha_2 R$ **(2п),** док је та веза за доњи цилиндар $a_1 = a_2 + \alpha_1 R$ **(3п)**. Решавањем претходног система једначина налази се $\alpha_2 = \frac{m^2R^3+2ImR}{ImR^2+(I+mR^2)^2}g$ **(5п)** и коначно тражено убрзање горњег цилиндра $a_2 = \frac{1+2I/mR^2}{I/mR^2+(1+I/mR^2)^2}g$ **(2п)**.

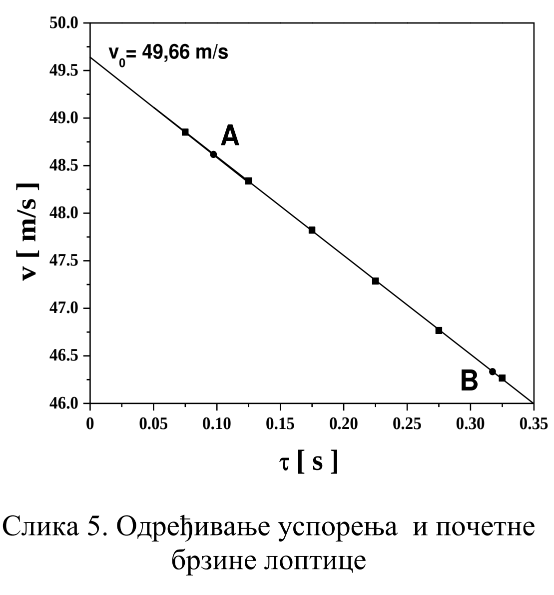


Слика 4.

P5. Пошто се ради у равномерно промењљивом кретању лоптице у општем случају за брзину лоптице у неком тренутку t важи једначина $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. Како су познате координате лоптице у појединим сукцесивним тренуцима времена (са једнаким временским интервалом $\Delta t = 0{,}05$ s) могуће је одредити средњу хоризонталну ($v_x = \Delta x/\Delta t$) и вертикалну ($v_y = \Delta y/\Delta t$) компоненту брзине лоптице за дати временски интервал. Средњи интензитет брзине лоптице за дати интервал се рачуна из $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и може да придружи временском тренутку τ који одговара средини посматраног временског интервала. У Табели 1 су приказане одговарајуће израчунате вредности поменутих величина (**коректно састављена Табела вреди 6п**). На слици 5 је приказана зависност интензитета брзине лоптице од времена $v = f(\tau)$ (**коректно нацртан график вреди 3п**).

Табела 1.

N	**t**	**x**	**y**	**Интервал времена**	**Време** τ	$\Delta x = x_{i+1} - x_i$	$v_x = \Delta x/\Delta t$	$\Delta y = \lvert y_{i+1} - y_i \rvert$	$v_y = \Delta y/\Delta t$	**v**
	[s]	**[m]**	**[m]**		**[s]**	**[m]**	**[m/s]**	**[m]**	**[m/s]**	**[m/s]**
1	0,05	2,462	2,210	2-1	0,075	x_{21} =2,438	48,76	0,15	3	48,852
2	0,10	4,900	2,060	3-2	0,125	x_{32} =2,404	48,08	0,25	5	48,339
3	0,15	7,304	1,810	4-3	0,175	x_{43} =2,375	47,50	0,277	5,54	47,821
4	0,20	9,679	1,533	5-4	0,225	x_{54} =2,346	46,92	0,294	5,88	47,286
5	0,25	12,024	1,239	6-5	0,275	x_{65} =2,317	46,34	0,315	6,3	46,766
6	0,30	14,341	0,924	7-6	0,325	x_{76} =2,288	45,76	0,341	6,82	46,265
7	0,35	16,629	0,583							



Слика 5. Одређивање успорења и почетне брзине лоптице

Графичком методом се избором две неексперименталне тачке које припадају правој v=f(τ) нпр. тачке A са координатама A (0,1s 48,6 m/s) и тачке B са координатама B (0,316 s 46,3 m/s) одређује коефицијент правца као $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow k = -10{,}648\,\mathrm{m/s^2}$ **(4п)** који одговара вредности успорења лоптице (знак – указује да се ради о успорењу). Релативна грешка коефицијента правца се рачуна према једначини $\dfrac{\Delta k}{k} = \dfrac{\Delta y_B + \Delta y_A}{\lvert y_B - y_A \rvert} + \dfrac{\Delta x_B + \Delta x_A}{\lvert x_B - x_A \rvert} \approx 0{,}0359$ одакле се налази $\Delta k = 0{,}038\ \mathrm{m/s^2}$ **(4п)** па се за коефицијент правца коначно налази $k = a = (-10{,}6 \pm 0{,}4)\,\mathrm{m/s^2}$ **(1п)**. Одсечак на *y* оси одговара интензитету почетне брзине и очитава се са графика $v_0 = (49{,}66 \pm 0{,}02)\,\mathrm{m/s}$ **(2п).**

***Напомена* I**: Како су занемарене грешке самог мерења, грешке очитавања са графика положаја тачака A и B ($\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A, \Delta y_B$) зависе од коришћене размере, а узима се вредност најмањег подеока на графику.

***Напомена* II:** Незнатна разлика у почетној брзини се може добити придруживањем брзине лоптице једном од крајњих тренутака посматраног интервала времена (а не средини интервала) па ће и таква решења такође бити призната као потпуно тачна.

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

I РАЗРЕД

Друштво Физичара Србије
Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Републике Србије

БЕОГРАД
13 - 14. 4. 2013.

ЗАДАЦИ – фермионска категорија

1. Два аутомобила A и B се крећу у истом смеру праволинијским путевима који су међусобно паралелни. У почетном тренутку аутомобили имају исте позиције (налазе се један поред другог) и имају брзине v_A=10 m/s и v_B=10 m/s. Аутомобил A се креће са константним успорењем интензитета a_A=1 m/s^2 до заустављања. Аутомобил B се креће на следећи начин: првих 5 m пута се креће равномерно константном брзином, а затим следећих 5 m пута успорава константним успорењем a_B, и све тако наизменично до коначног заустављања. На свим деловима пута где се креће успорено аутомобил B има исто константно успорење a_B. Ако се оба аутомобила зауставе на истом растојању у односу на почетни положај, одредити:

а) укупно време равномерног кретања аутомобила B

б) укупно време успореног кретања аутомобила B.

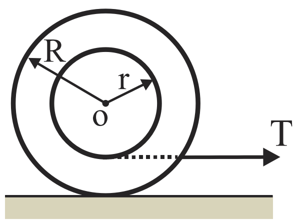
(20п)

2. Калем са намотаним танким безмасеним неистегљивим концем налази се на хоризонталном столу (слика 1). Маса калема је M, спољашњи полупречник R, унутрашњи полупречник r, а момент инерције у односу на хоризонталну осу ротације (тачка O на слици 1) износи I. Слободан крај нити се вуче константом хоризонталном силом T као што је приказано на слици 1. Сматрати да оса ротације калема не мења правац током котрљања калема, као и да је ненамотани део конца увек паралелан са подлогом. Ако се калем котрља без клизања одредити:

а) убрзање центра калема (тачка O на слици 1) у односу на подлогу

б) силу трења између подлоге и калема

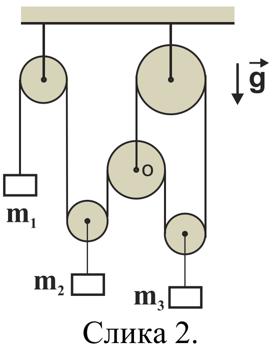
в) максималну вредност интензитета силе T за коју неће доћи до проклизавања калема, ако је коефицијент трења између калема и хоризонталне подлоге μ. **(20п)**



Слика 1.

3. У систему приказаном на слици 2 познате су масе блокова m_1, m_2 и m_3, а масе котурова су занемарљиве. Ако је систем у почетном тренутку пуштен да се креће из стања мировања, одредити убрзање центра средњег котура (тачка O на слици 2) у односу на подлогу. Сматрати да се нит у сваком тренутку налази у вертикалном положају. Сматрати да је нит безмасена и неистегљива, а да се силе трења у систему могу занемарити.

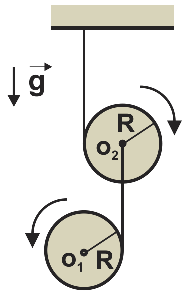
(20п)



Слика 2.

4. У систему на слици 3 су приказана два нехомогена цилиндра, сваки масе m и полупречника R, на које су намотане одговарајуће нити. Момент инерције сваког цилиндра у односу на своју хоризонталну осу ротације (тачке O_1 и O_2 на слици 3) износи I. Сматрати да су нити намотане на цилиндре неистегљиве, као и да се њихова маса може занемарити. Ако је систем почео да се креће из стања мировања, одредити интензитет убрзања горњег цилиндра у односу на непокретну подлогу. Сматрати да су нити у сваком тренутку у вертикалном положају и да нема проклизавања нити. Занемарити силе трења у систему.

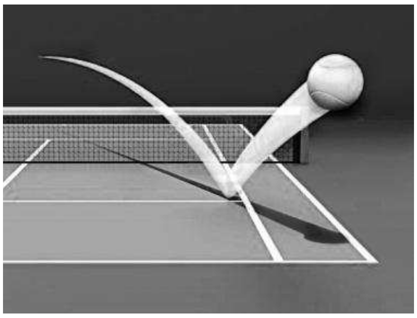
(20п)



Слика 3.

5. Данас се у многим професионалним спортовима, а посебно у тенису, користи Hawk-Eye (око соколово) систем за прецизно праћење трајекторије лоптице. Овај систем су 2001. године развили Пол Хокинс и Дејвид Шери у Великој Британији, а данас је власништво компаније Sony. За разлику од линијских судија овај систем је много прецизнији и објективнији па значајно помаже главном судији да донесе исправну одлуку. Систем користи неколико веома брзих камера које из различитих углова снимају кретање лоптице, а помоћу моћног рачунара се анализом снимљених слика прорачунавају све физичке величине неопходне за реконструкцију трајекторије тениске лоптице. Тренутни положај лоптице се одређује помоћу једноставног геометријског модела триангулације који је био познат филозофима још у доба античке Грчке. На слици 4 је приказана једна тако реконструисана трајекторија тениске лоптице.

У мечу Davis Cup такмичења између репрезентација Србије и USA маестралном игром наш дубл Зимоњић-Бозољац је победио тренутно најбољи дубл на свету браћу Брајане. У том мечу наши репрезентативци су имали одличан сервис који им је помогао да дођу до победе.



Слика 4.

Имајући у виду да у реалној ситуацији на кретање лоптице утичу многи фактори, (временски услови, брзина и правац ветра, спин лоптице, председник Комисије за такмичење који скупља лоптице итд.) на основу неколико снимљених слика лоптице могу се проценити основне карактеристике једног сервис ударца.

У Табели 1 су приказане координате положаја лоптице у појединим тренуцима времена након сервиса Илије Бозољца. Почетни тренутак је тренутак сервиса. Ако се претпостави да се лоптица креће у вертикалној равни са константним успорењем на основу датих података може се проценити интензитет почетне брзине лоптице приликом сервиса, као и интензитет њеног успорења. Да би то урадили потребно је:

а) нацртати зависност интензитета укупне брзине лоптице од времена
б) графичком методом одредити успорење и почетну брзину лоптице. Пошто су грешке мерених величина занемарљиве, проценити грешке за почетну брзину и убрзање лоптице на основу грешака приликом очитавања одговарајућих вредности са графика.

Табела 1.

t [s]	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
x [m]	2,462	4,900	7,304	9,679	12,024	14,341	16,629
y [m]	2,210	2,060	1,810	1,533	1,239	0,924	0,583

Напомена:

Није потребно нумерички рачунати грешке за брзину лоптице.

(20п)

Задатке припремили: **Рецензент**:
др Зоран Мијић, Институт за физику, Београд *др Невена Пуач,* Институт за физику, Београд
Зоран Поповић, Физички факултет, Београд

Председник Комисије за такмичење ученика средњих школа ДФС:
др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

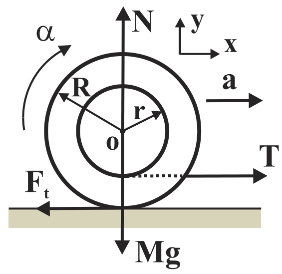
I РАЗРЕД

Друштво **Физичара Србије**
Министарство просвете и науке Републике Србије
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА – фермионска категорија

БЕОГРАД
13 - 14. 4. 2013.

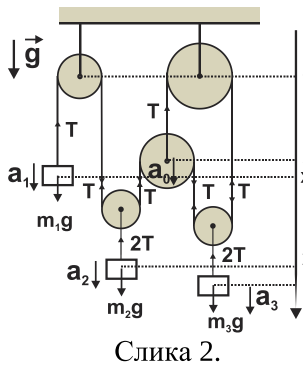
P1. а) Укупан пређени пут оба аутомобила је $S = v_A^2/2a_A = 50\,m$ **(2п)**. Трајекторија аутомобила B се може поделити на n делова на којима се креће константном брзином и n делова на којима се креће са константним успорењем $a_{B,}$ тј. укупан пут S се може поделити на 2n једнаких делова. Према томе, $S = 2n\Delta s$, (Δs=5 m), а из ове везе налазимо да је број сегмената пута на којима се аутомобил креће константном брзином (успорењем) једнак $n = 5$ **(2п)**. Аутомобил B се зауставља након пређеног петог сегмента пута на којем успорава, одакле добијемо једнакост $v_B^2 = 2na_B\Delta s$, а из ње добијамо убрзање $a_B = v_B^2/2n\Delta s = 2\ m/s$ **(3п)**. Брзине аутомобила B на i-тим деловима пута, на којима се аутомобил креће равномерним брзинама, добијају се из релације $v_{Bi} = \sqrt{v_B^2 - 2(i-1)a_B\Delta s}$ где је $i = 1,2,3,4,5$ тј. i-ти сегмент пута. Тражене брзине су $v_{B1} = v_B = 10\ \mathrm{m/s}$ **(1п)** $v_{B2} = \sqrt{v_B^2 - 2a_B\Delta s} = 8{,}94\ \mathrm{m/s}$ **(1п)** $v_{B3} = \sqrt{v_B^2 - 4a_B\Delta s} = 7{,}75\ \mathrm{m/s}$ **(1п)**, $v_{B4} = \sqrt{v_B^2 - 6a_B\Delta s} = 6{,}32\ \mathrm{m/s}$ **(1п)** и $v_{B5} = \sqrt{v_B^2 - 8a_B\Delta s} = 4{,}47\ \mathrm{m/s}$ **(1п).** Време кретања на i-том делу пута је $t_i = \Delta s/v_{Bi}$ **(1п)** па се за укупно време кретања добија $t_{\text{равномерно}} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 3{,}613\ \mathrm{s}$ **(1п)**.

б) Из формуле за брзину равномерног успореног кретања, могу се одредити интервали времена у којима се аутомобил креће успорено на одговарајућим сегментима пута, пошто се знају брзине аутомобила у тренуцима пре и после успорења: $t_{12} = (v_1 - v_2)/a_B = 0{,}53\ \mathrm{s}$ **(1п)** где је t_{12} време кретања аутомобила на првом сегменту пута на којем се креће успорено па аналогно за преостале сегменте пута важи $t_{23} = (v_2 - v_3)/a_B = 0{,}59\ \mathrm{s}$ **(1п)** $t_{34} = (v_3 - v_4)/a_B = 0{,}711\ \mathrm{s}$ **(1п)** $t_{45} = (v_4 - v_5)/a_B = 0{,}926\ \mathrm{s}$ **(1п)** и $t_{50} = v_5/a_B = 2{,}236\ \mathrm{s}$ **(1п)** (када се коначно заустави). Укупно време успореног кретања аутомобила је збир претходних интервала времена тј. $t_{\text{успорено}} = t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{45} + t_{50} = 5\ \mathrm{s}$ **(1п).**



Слика 1.

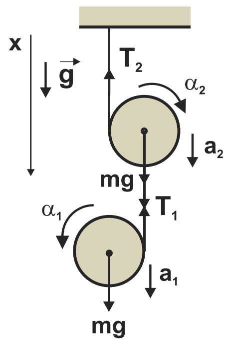
P2. На слици 1 су приказане силе које делују на котур и претпостављени смерови кретања. Сила теже и нормална сила која делује на котур не стварају момент сила, делују на центар масе. Претпоставимо да сила затезања нити делује тако да ствара момент који окреће калем супротно од смера казаљке на сату, а сила трења супротно од ње. Применом другог Њутновог закона добијају се једначине кретања дуж x и y осе: $Ma = T - F_t$ **(2п)** (где је F_t сила трења котрљања), $N = Mg$ **(2п)**, а једначина ротације калема је $I\alpha = RF_t - rT$ **(3п)**. Пошто нема клизања, веза између угаоног убрзања и убрзања центра калема је $a = R\alpha$ **(2п)**. Из претходних једначина се налази тражено убрзање центра калема $a = \frac{(R-r)R}{MR^2+I}T$ **(4п)**. и сила трења $F_t = \frac{MRr+I}{MR^2+I}T$ **(4п)**. Ако интензитет силе T расте повећава се и сила трења котрљања, а њена максимална вредност је у тренутку проклизавања и износи μMg. Како за силу трења котрљања важи да је мања или једнака сили трења клизања $F_t \le \mu Mg$ **(1п)**. Максимална вредност интензитета силе затезања нити при којој не долази до проклизавања калема је $T = \mu Mg\,\frac{MR^2+I}{MRr+I}$ **(2п)**.



Слика 2.

P3. На слици 2 су приказане одговарајуће силе које делују у посматраном систему. Како је према услову задатка маса котурова занемарљива за средњи котур важи $m_0 \approx 0$ па из једначине транслаторног кретања $m_0a_0 = m_0g + 2T - T$ **(3п)** следи да мора да важи $T \approx 0$ **(6п)**. Имајући ово у виду за кретање блока масе m_1 важи $m_1a_1 = m_1g$ одакле се закључује да је $a_1 = g$ и аналогно за преостале блокове тј. важи једнакост $a_1 = a_2 = a_3 = g$ **(3п).** Укупна дужина неистегљиве нити је у сваком тренутку иста и износи $l = x_1 + x_2 + (x_2 - x_0) + x_0 + (x_3 - x_0) + x_3 = const$ односно $l = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_0 = const$ па у сваком тренутку важи $\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + 2\Delta x_3 - \Delta x_0 = 0$ **(5п)**. Пошто је систем почео да се креће из стања мировања следи да је $\frac{a_1t^2}{2} + 2\frac{a_2t^2}{2} + 2\frac{a_3t^2}{2} - \frac{a_0t^2}{2} = 0$ одакле се закључује да је тражено убрзање средњег котура $a_0 = a_1 + 2a_2 + 2a_3$ **(2п)** односно $a_0 = 5g$ **(1п)**.

P4. На слици 3 су приказане релевантне силе које делују у систему, као и претпостављени смерови кретања цилиндара. Једначина транслаторног кретања доњег цилиндра је $ma_1 = mg - T_1$ **(2п)** док је ротација цилиндра око своје осе описана једначином $I\alpha_1 = T_1 R$ **(2п)**. За горњи цилиндар важи једначина кретања $ma_2 = mg + T_1 - T_2$ **(2п)**, и ротације $I\alpha_2 = T_2 R$ **(2п).** Како нема проклизавања конца веза између угаоног и транслаторног убрзања горњег цилиндра је $a_2 = \alpha_2 R$ **(2п),** док је та веза за доњи цилиндар $a_1 = a_2 + \alpha_1 R$ **(3п)**. Решавањем претходног система једначина налази се $\alpha_2 = \frac{m^2R^3+2ImR}{ImR^2+(I+mR^2)^2} g$ **(5п)** и коначно тражено убрзање горњег цилиндра $a_2 = \frac{1+2I/mR^2}{I/mR^2+(1+I/mR^2)^2} g$ **(2п)**.



Слика 3.

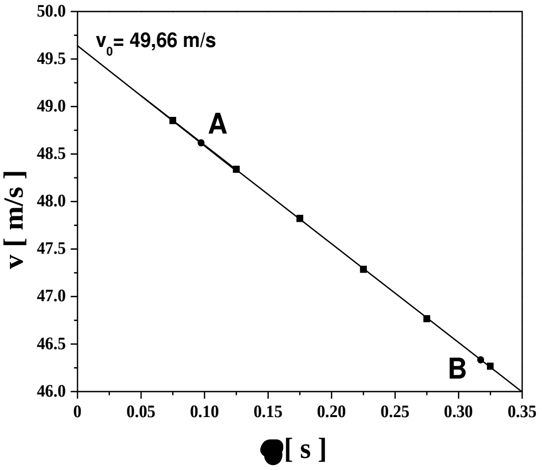
P5.

Пошто се ради у равномерно промењљивом кретању лоптице у општем случају за брзину лоптице у неком тренутку t важи једначина $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. Како су познате координате лоптице у појединим сукцесивним тренуцима времена (са једнаким временским интервалом $\Delta t = 0{,}05\,\text{s}$) могуће је одредити средњу хоризонталну ($v_x = \Delta x/\Delta t$) и вертикалну ($v_y = \Delta y/\Delta t$) компоненту брзине лоптице за дати временски интервал. Средњи интензитет брзине лоптице за дати интервал се рачуна из $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ и може да придружи временском тренутку τ који одговара средини посматраног временског интервала. У Табели 1 су приказане одговарајуће израчунате вредности поменутих величина (**коректно састављена Табела вреди 6п**). На слици 4 је приказана зависност интензитета брзине лоптице од времена $v = f(\tau)$ (**коректно нацртан график вреди 3п**).

Табела 1.

N	t	x	y	Интервал времена	Време τ	Δx = x$_{i+1}$ - x$_i$	v$_x$=Δx/Δt	Δy = |y$_{i+1}$ - y$_i$|	v$_y$=Δy/Δt	v
	[s]	[m]	[m]		[s]	[m]	[m/s]	[m]	[m/s]	[m/s]
1	0,05	2,462	2,210	2-1	0,075	x_{21} =2,438	48,76	0,15	3	48,852
2	0,10	4,900	2,060	3-2	0,125	x_{32} =2,404	48,08	0,25	5	48,339
3	0,15	7,304	1,810	4-3	0,175	x_{43} =2,375	47,5	0,277	5.54	47,821
4	0,20	9,679	1,533	5-4	0,225	x_{54} =2,346	46,92	0,294	5.88	47,286
5	0,25	12,024	1,239	6-5	0,275	x_{65} =2,317	46,34	0,315	6.3	46,766
6	0,30	14,341	0,924	7-6	0,325	x_{76} =2,283	45,76	0,341	6.82	46,265
7	0,35	16,629	0,583							

Графичком методом се избором две неекспериментални тачке које припадају правој v=f(τ) нпр. тачке A са координатама A (0,1s 48,6 m/s) и тачке B са координатама B (0,316 s 46,3 m/s) одређује коефицијент правца као $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow k = -10{,}648\,\text{m/s}^2$ **(4п)** који одговара вредности успорења лоптице (знак – указује да се ради о успорењу). Релативна грешка коефицијента правца се рачуна према једначини $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{|y_B - y_A|} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{|x_B - x_A|} \approx 0{,}0359$ одакле се налази $\Delta k = 0{,}038\,\text{m/s}^2$ **(4п)** па се за коефицијент правца коначно налази $k = a = (-10{,}6 \pm 0{,}4)\,\text{m/s}^2$ **(1п)**. Одсечак на *y* оси одговара интензитету почетне брзине и очитава се са графика $v_0 = (49{,}66 \pm 0{,}02)\,\text{m/s}$ **(2п).**



Слика 4. Одређивање успорења и почетне брзине лоптице

Напомена **I**: Како су занемарене грешке самог мерења, грешке очитавања са графика положаја тачака А и В ($\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A, \Delta y_B$) зависе од коришћене размере, а узима се вредност најмањег подеока на графику.

Напомена **II:** Незнатна разлика у почетној брзини се може добити придруживањем брзине лоптице једном од крајњих тренутака посматраног интервала времена па ће и таква решења такође бити призната као потпуно тачна.