50. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА ШКОЛСКЕ 2011/2012. ГОДИНЕ

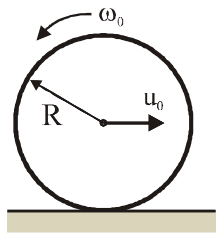
Друштво Физичара Србије
Министарство просвете и науке Републике Србије

I РАЗРЕД

СЕНТА
21.04.2012.

ЗАДАЦИ – II Група

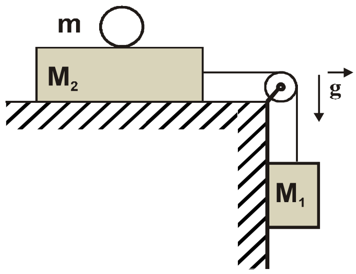
1. Играчи билијара су познати по извођењу специфичних ударaца и способности да након свог потеза оставе жељену куглу на одређену позицију на билијарском столу како би што лакше могли одиграти наредни потез. Претпоставимо да је билијарска кугла хомогена, полупречника R, и да у почетном тренутку мирује на билијарском столу. Играч изведе такозвани ударац са "спином уназад", тако да врхом штапа удари куглу на такав начин да се центар кугле почне кретати брзином u_0 у односу на подлогу, а истовремено се кугли саопшти почетна угаона брзина ω_0 око хоризонталне осе која је нормална на правац кретања кугле (види слику 1). Пошто кретање кугле зависи од односа $u_0/R\omega_0$, одредити колика треба да буде вредност датог односа $u_0/R\omega_0$ да би кугла наставила да се креће напред, као и вредност тог односа $u_0/R\omega_0$ за који ће кугла почети да се креће назад према штапу. Претпоставити да је сила трења клизања између кугле и стола константна. **(20п)**



Слика 1.

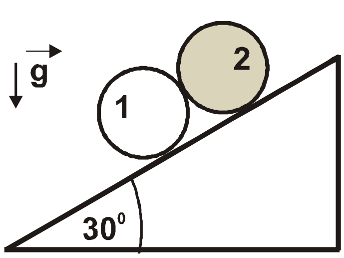
2. Тело константне масе се креће у хоризонталној равни константном брзином интензитета v. У неком тренутку на тело почне да делује константна сила тако да се у наредних t секунди од почетка деловања силе брзина тела преполови и износи $v/2$. Након следећих t секунди брзина тела се опет преполови и износи $v/4$. Колика ће бити брзина тела након још наредних t секунди? **(20п)**

3. У систему приказаном на слици 2 познате су масе блокова M_1 и M_2, као и маса хомогене лопте m. Блокови су повезани безмасеном неистегљивом нити, која је пребачена преко идеалног котура. Трење између блокова и подлоге, као и у осовини котура може да се занемари. Ако је систем почео да се креће из стања мировања одредити убрзања блокова и центра лопте у односу на непокретну подлогу. Сматрати да се лопта котрља без проклизавања. **(20п)**



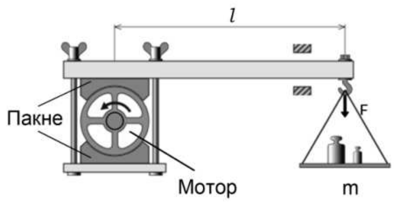
Слика 2.

4. Хомогена тела ваљак (1) и кугла (2), направљена од различитог материјала, мирују на стрмој равни нагибног угла β=30° (слика 3). Тела имају једнаке масе и полупречнике и налазе се у међусобном контакту. У неком тренутку тела почну да се котрљају без проклизавања низ стрму раван тако да се у сваком тренутку налазе у међусобном контакту као на слици 3. Током кретања осе ротације ваљка и кугле остају у истој равни и не мењају правац. Коефицијент трења између кугле и ваљка је μ. Одредити убрзање система тела у односу на подлогу. **(20п)**



Слика 3.

5. Једна од најзначајнијих техничких карактеристика електричних машина јесте познавање њиховог понашања под одређеним реалним оптерећењем (како се машина понаша при различитим оптерећењима, коликим максималним оптерећењем машина сме да се оптерети и слично). За оптерећивање мотора и одређивање његове механичке снаге користе се механичке, хидрауличне и магнетне кочнице. Механичке кочнице су једноставне конструкције и имају очигледан физички принцип рада који се заснива на кочењу услед механичког трења које апсорбује снагу мотора и преводи је у топлоту. Као кочиони систем се могу користити диск плочице (као код аутомобила, точак се кочи јачим или слабијим притезањем алуминијумских облога-пакни уз точак). Пронијева кочница је типичан представник механичких кочница која се користи за мерење снаге мотора. Проналазач по коме је и добила име је славни француски математичар Gaspard Clair Francois Marie Riche de Prony (1755-1839) који је руководио техничким пројектима за потребе Наполеонове војске.



Слика 4.

На слици 4 је шематски приказана једна од верзија Пронијеве кочнице. Момент силе трења између пакни и мотора, који се окреће константном угаоном брзином, се уравнотежава помоћу тегова масе m који се налазе на крају полуге дужине l.

Снага мотора се одређује према формули

$$P = mgl\omega \qquad (1)$$

где је P снага мотора [W] (јединица за мерење снаге је ват и једнака је $[W] = \frac{[N][\mathrm{m}]}{[s]}$), m маса тегова (оптерећење), l дужина полуге, ω угаона брзина мотора.

Због своје мале осетљивости Пронијева кочница се углавном користи за мерење мотора већих снага као што су мотори аутомобила (израз "коњска снага" као мера за снагу мотора потиче од овог метода мерења снаге).

У једном индустријском постројењу помоћу Пронијеве кочнице је вршено испитивање понашања шест мотора, који се окрећу константном угаоном брзином, у условима радног оптерећења сваког мотора. Сваком од мотора је Пронијевом кочницом три пута измерена снага коју мотор развија под својим радним оптерећењем и у табели 1 су дате измерене вредности. Дужина полуге Пронијеве кочнице је $l = (1{,}200 \pm 0{,}002)$ m. За убрзање Земљине теже узети $g = 9{,}81\ m/s^2$ при чему се грешка може занемарити.

Табела 1.

m [kg]	6	7	8	9	10	11
P_1 [W]	14700	17450	19600	22050	24650	27100
P_2 [W]	14900	17150	20200	22150	24250	27000
P_3 [W]	14800	17750	19900	22250	24450	27200

а) Нацртати график зависности снаге мотора од оптерећења тј. функцију P=*f*(m) **(20п)**

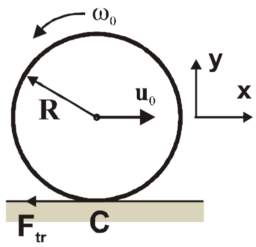
б) Графичком методом одредити угаону брзину мотора и израчунати одговарајућу грешку

Задатке припремили:
др Зоран Мијић, Институт за физику, Београд
Зоран Поповић, Физички факултет, Београд

Рецензент:
др Невена Пуач, Институт за физику, Београд

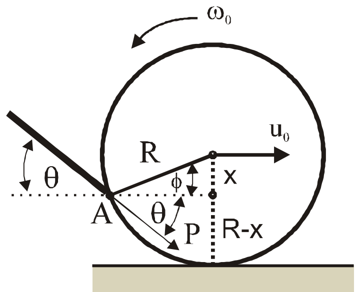
Председник Комисије за такмичење ученика средњих школа:
др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд

P1. Након ударца штапа билијарска кугла почне да се котрља са проклизавањем при чему је почетна брзина центра кугле у односу на сто u_0, а почетна угаона брзина ω_0 са смеровима као на слици 1. Према услову задатка сила трења између стола и кугле је константна и износи $F_{tr} = \mu mg$ па је једначина транслаторног кретања кугле $ma = -\mu mg$ **(1п)** одакле се закључује да је транслаторно убрзање кугле $a = -\mu g$. Брзина центра кугле у неком тренутку је $u = u_0 - \mu gt$ **(1п)**. Угаона брзина кугле је $\omega = \omega_0 - \alpha t$ где је $\alpha = RF_{tr}/I = 5\mu g/2R$ **(2п)** угаоно убрзање, одакле се налази $\omega = \omega_0 - 5\mu gt/2R$ **(3п)**. Брзина додирне тачке кугле и стола (тачка C на слици 1) у неком тренутку је $v_c = u + R\omega$ односно $v_c = u_0 + R\omega_0 - 7\mu gt/2$ **(3п)**. У неком тренутку τ кугла престаје да се котрља са проклизавањем и наставља да се котрља без проклизавања. Тај тренутак се налази из услова да брзина додирне тачке C постаје једнака нули па се из претходне једначине за $v_c = 0$ налази тражени тренутак τ tj. $\tau = 2(u_0 + R\omega_0)/7\mu g$ **(3п)**. Брзина центра кугле у односу на сто у том тренутку τ износи $u = u_0 - \mu g\tau = (5u_0 - 2R\omega_0)/7$ **(3п)** одакле се закључује да ће за $u > 0$ кугла наставити да се креће напред у смеру x осе (од штапа) тј. ако је испуњен услов $5u_0 - 2R\omega_0 > 0$ односно $u_0/R\omega_0 > 2/5$ **(2п)**. Ако је $u < 0$ кугла ће почети да се котрља уназад (ка штапу) тј. ако је испуњен услов $5u_0 - 2R\omega_0 < 0$ односно $u_0/R\omega_0 < 2/5$ **(2п)**.



Слика 1.

Напомена:
Да је одређеним ударцем штапа могуће постићи оба кретања кугле може се показати разматрањем ситуације када штап удара куглу у тачки A под углом θ у односу на хоризонтални правац, која се налази на висини $R - x$ од стола (слика 2). Штап предаје кугли импулс интензитета P тако да у почетном тренутку важи $mu_0 = Pcos\theta$ и $I\omega_0 = PRsin(\theta + \varphi)$ где је $sin\varphi = x/R$. Да би одредили граничне услове за оба могућа кретања посматрамо критични случај када је $5u_0 = 2R\omega_0$ па се из претходних једначина налази $cos\theta = \sin(\theta + \varphi)$ тј. $tg\theta = \left(\frac{1-x/R}{1+x/R}\right)^{\frac{1}{2}}$. Очигледно се може одредити реална вредност угла θ за сваки однос x/R (ипак случај $x \to R$ је тешко извести у пракси чак и за професионалне играче!).



Слика 2.

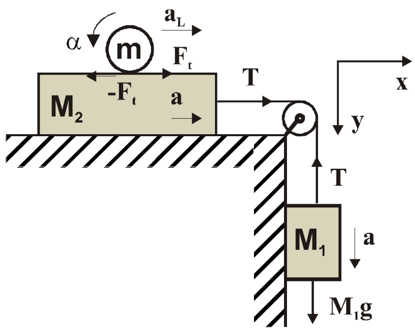
P2. ***I начин:***
У општем случају кретања тела у две димензије из услова задатка за брзину тела у тренутку t се може писати $\sqrt{(v_x + a_x t)^2 + (v_y + a_y t)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ **(2п)** (а) где су v_x и v_y компоненте почетне брзине, а a_x и a_y константне (јер на тело константне масе делује константна сила) компоненте убрзања. Слично, за брзину тела у тренутку $2t$ важи $\sqrt{(v_x + a_x 2t)^2 + (v_y + a_y 2t)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ **(2п)** (б). Квадрирањем и одузимањем једначине (а) од (б) добија се $\left(\frac{3}{16}v_x^2 + 2v_x a_x t + 3a_x^2 t^2\right) + \left(\frac{3}{16}v_y^2 + 2v_y a_y t + 3a_y^2 t^2\right) = 0$ **(2п)** Множењем са 3 добија се $\left(\frac{9}{16}v_x^2 + 6v_x a_x t + 9a_x^2 t^2\right) + \left(\frac{9}{16}v_y^2 + 6v_y a_y t + 9a_y^2 t^2\right) = 0$ **(2п)**. Ако се искористи једнакост $\frac{9}{16} = \frac{9}{16} + \frac{7}{16} - \frac{7}{16}$ добија се $\left(v_x^2 + 6v_x a_x t + 9a_x^2 t^2\right) + \left(v_y^2 + 6v_y a_y t + 9a_y^2 t^2\right) = \frac{7}{16}\left(v_x^2 + v_y^2\right)$ **(7п)**
$v_{3t} = \sqrt{(v_x + a_x 3t)^2 + (v_y + a_y 3t)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ **(3п)** тј. $v_{3t} = \frac{\sqrt{7}}{4}v$ **(2п)**.

Напомена:

Идеја да се у тренутку nt брзина представи у облику $v_{nt}=\sqrt{(v_x+a_xnt)^2+(v_y+a_ynt)^2}=K\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ знатно скраћује рачун. У развоју $(v_x+a_xnt)^2=v_x^2+2na_xt+n^2a_x^2t_x^2$ коефицијенти задња два члана су увек пар $\omega_n=(2n,n^2)$ нпр. за тренутак $t\ \omega_1=(2,1)$; за $2t\ \omega_2=(4,4)$; за $3t\ \omega_3=(6,9)$; за $4t\ \omega_t=(8,16)$ итд. Увек се наредни тренутак nt може добити као линеарна комбинација неких од претходних тренутака (као што је претходно урађено: брзина у тренутку $3t$ је добијена комбинацијом брзина у тренуцима t и $2t$ односно $\omega_3=3(\omega_2-\omega_1)$ што ако се уочи доводи до брзог решавања проблема.

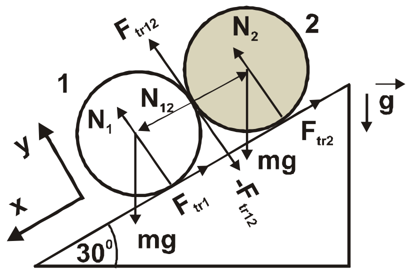
II начин: Стандардним поступком, решавањем система једначина, долази се до решења после **доста** рачуна. Ради једноставности претпоставимо да се тело пре деловања силе креће у смеру x осе константном брзином v. Тада можемо да пишемо $\sqrt{(v-a_xt)^2+a_y^2t^2}=k_1\sqrt{v^2}$ **(2п)** и $\sqrt{(v-a_x2t)^2+a_y^24t^2}=k_2\sqrt{v^2}$ **(2п)** за тренутке t и $2t$ респективно, где су $k_1=1/2$ и $k_2=1/4$. Решавањем система за компоненте убрзања се добија $a_x=\frac{v}{4t}\left(k_2^2-4k_1^2+3\right)=\frac{33}{64}\frac{v}{t}$ **(4п)** и $a_y=\frac{v}{t}\sqrt{\left[k_1^2+\frac{k_2^2-4k_1^2+3}{2}-\frac{(k_2^2-4k_1^2+3)^2}{16}-1\right]}=\frac{\sqrt{63}}{64}\frac{v}{t}$ **(4п)**. Компоненте брзине у тренутку $3t$ су $v_{x,3t}=v-3a_xt$ **(2п)** и $v_{y,3t}=3a_yt$ **(2п)** па се за интензитет тражене брзине добија $v_{3t}=\sqrt{v_{x,3t}^2+v_{y,3t}^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}v\approx 0,66v$ **(4п)**.

Р3. На слици 3 су приказане релевантне силе које делују у систему. Кретање блокова у односу на подлогу је описано једначинама $M_1a=M_1g-T$ **(2п)**, $M_2a=T-F_t$ **(2п)**, где је Т сила затезања конца, а F_t сила трења котрљања. Транслаторно кретање лопте у односу на непокретну подлогу је описано једначином $ma_L=F_t$ **(2п)** док за котрљање лопте без клизања важи $I\alpha=F_tR$ **(2п)** при чему је убрзање лопте $a_L=a-\alpha R$ **(4п)** (α је угаоно убрзање лопте, R полупречник лопте, I момент инерције лопте). Из претходних једначина се за тражено убрзање блокова налази $a=M_1g/(M_1+M_2+2m/7)$ **(4п)** док је убрзање лопте у односу на подлогу $a_L=2M_1g/7(M_1+M_2+2m/7)$ **(4п)**.



Слика 3.

Р4. Компоненте гравитационе силе кугле (цилиндра) у правцу кретања и нормално на косу раван су $mg/2$ и $mg\sqrt{3}/2$. За транслаторно кретање цилиндра важи једначина: $X: mg\frac{1}{2}+N_{12}-Ftr_1=ma$ **(2п)**. За ротацију цилиндра важи $(Ftr_1-Ftr_{12})r=I_1\alpha$ **(2п)** где је $I_1=mr^2/2$ момент инерције цилиндра, α угаоно убрзање, r радијус цилиндра и кугле, Ftr_1 сила трења котрљања између ваљка и подлоге, а $Ftr_{12}=N_{12}\mu$ **(2п)** сила трења између ваљка и кугле. Сила реакције између тела је $N_{12}=N_{21}$. Убрзања тела током кретања су иста $a_1=a_2=a$ **(2п)**. Силе реакције подлоге на цилиндар и куглу су редом N_1 и N_2. Динамика транслације кугле описана је једначином: $X: mg\frac{1}{2}-N_{21}-Ftr_2=ma$ **(2п)**. За ротацију кугле важи једначина $(Ftr_2-Ftr_{12})r=I_2\alpha$ **(2п)**, где је $I_2=2mr^2/5$ момент инерције кугле, F_{tr2} сила трења котрљања између кугле и стрме равни. За оба тела важи да је угаоно убрзање $\alpha_1=\alpha_2=\alpha=\frac{a}{r}$ **(2п)**.



Слика 4.

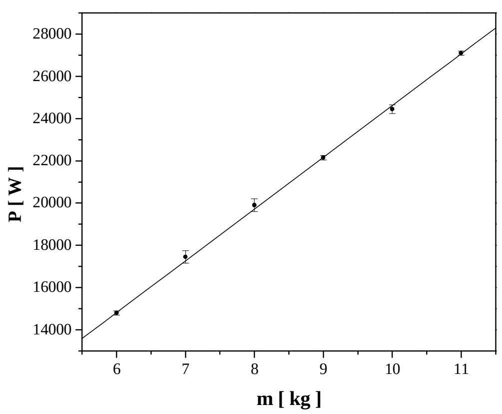
Комбинацијом претходних једначина добија се систем: $\frac{1}{2}mg + N_{12}(1-\mu) = ma + I_1\frac{a}{r^2}$ **(1п)** $\frac{1}{2}mg - N_{12}(1+\mu) = ma + I_2\frac{a}{r^2}$ **(1п)**. Коначно се убрзање система тела добија решењем овог система једначина $a = \frac{10g}{29+\mu}$ **(4п)**.

P5. У табели 1 су приказане средње вредности измерених снага за сваки мотор, као и одговарајућа апсолутна грешка **(2п)**.

Табела 1.

m [kg]	6	7	8	9	10	11
P_1 [W]	14700	17450	19600	22050	24650	27100
P_2 [W]	14900	17150	20200	22150	24250	27000
P_3 [W]	14800	17750	19900	22250	24450	27200
Ps [W]	(14800) **14800**	(17450) **17400**	(19900) **19900**	(22150) **22200**	(24450) **24400**	(27100) **27100**
ΔPs [W]	100	300	300	100	200	100

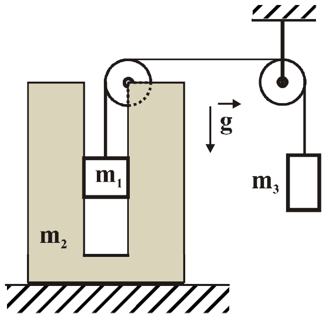
Једанчина $P = g\omega lm$ за неку одређену вредност угаоне брзине мотора, одређује линеарну зависност снаге мотора од оптерећења m где је коефицијент правца праве P=$f(m)$ једнак $k = g\omega l$ **(1п)**. На слици 5 је приказана одговарајућа зависност (коректно нацртан график вреди **5п**). Графичком методом се избором две неексперименталне тачке које припадају правој P=$f(m)$ нпр. тачке A са координатама A (6,3 kg 15500 W) и тачке B са координатама B (10,8 kg 26500 W) одређује коефицијент правца као $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow k = 2444,44\ \mathrm{W/kg}$ **(3п)**. Вредност угаоне брзине се добија из $\omega = \frac{k}{\mathrm{lg}} = 207,64\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ **(2п)**. Релативна грешка за коефицијент правца се рачуна из $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} \approx 0{,}063$ **(2п)** па се за грешку угаоне брзине добија $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta l}{l} \approx 0{,}065$ **(2п)** односно $\Delta\omega \approx 13{,}4\ rad/s$**(1п)**. Коначно се за угаону брзину налази $\omega = (210 \pm 20)\frac{rad}{s}$**(2п)**.



Слика 5. Одређивање брзине обртања мотора

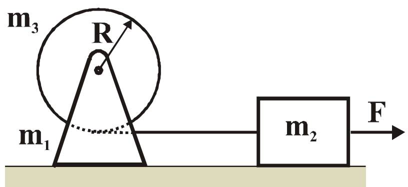
ЗАДАЦИ – О и С Група

1. У систему приказаном на слици 1 познате су масе блокова m_1 и m_3, као и тела m_2. Блокови су међусобно повезани безмасеном неистегљивом нити која је пребачена преко два идеална котура. Ако је систем почео да се креће из стања мировања, одредити интензитет убрзања блока масе m_1 у односу на непокретну подлогу. Сматрати да су блок масе m_1 и тело масе m_2 у сваком тренутку у међусобном контакту, и да се све силе трења у систему могу занемарити. **(20п)**



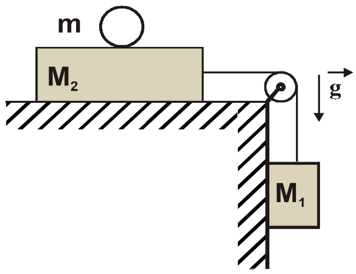
Слика 1.

2. Хомогени ваљак масе m_3 и полупречника R може да ротира око хоризонталне осовине која је причвршћена на постоље масе m_1. На ваљак је намотан неистегљив конац који је једним својим крајем причвршћен за блок масе m_2 (слика 2). Цео систем мирује на хоризонталној глаткој подлози. У почетном тренутку на блок масе m_2, паралелно са подлогом, почне да делује константна хоризонтална сила интензитета F као на слици 2. Сматрати да се масе конца и осовине, као и трење у осовини могу занемарити. Одредити убрзања блока и постоља у односу на подлогу, као и угаоно убрзање ваљка. **(20п)**



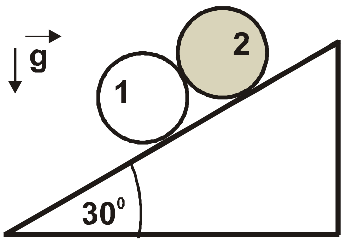
Слика 2.

3. У систему приказаном на слици 3 познате су масе блокова M_1 и M_2, као и маса хомогене лопте m. Блокови су повезани безмасеном неистегљивом нити, која је пребачена преко идеалног котура. Трење између блокова и подлоге, као и у осовини котура може да се занемари. Ако је систем почео да се креће из стања мировања одредити убрзања блокова и центра лопте у односу на непокретну подлогу. Сматрати да се лопта котрља без проклизавања. **(20п)**



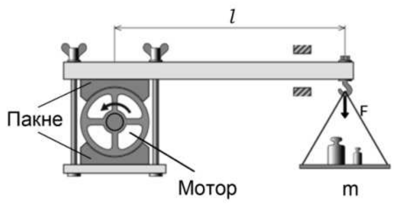
Слика 3.

4. Хомогена тела ваљак (1) и кугла (2), направљена од различитог материјала, мирују на стрмој равни нагибног угла β=30° (слика 4). Тела имају једнаке масе и полупречнике и налазе се у међусобном контакту. У неком тренутку тела почну да се котрљају без проклизавања низ стрму раван тако да се у сваком тренутку налазе у међусобном контакту као на слици 4. Током кретања осе ротације ваљка и кугле остају у истој равни и не мењају правац. Коефицијент трења између кугле и ваљка је μ. Одредити убрзање система тела у односу на подлогу. **(20п)**



Слика 4.

5. Једна од најзначајнијих техничких карактеристика електричних машина јесте познавање њиховог понашања под одређеним реалним оптерећењем (како се машина понаша при различитим оптерећењима, коликим максималним оптерећењем машина сме да се оптерети и слично). За оптерећивање мотора и одређивање његове механичке снаге користе се механичке, хидрауличне и магнетне кочнице. Механичке кочнице су једноставне конструкције и имају очигледан физички принцип рада који се заснива на кочењу услед механичког трења које апсорбује снагу мотора и преводи је у топлоту. Као кочиони систем се могу користити диск плочице (као код аутомобила, точак се кочи јачим или слабијим притезањем алуминијумских облога-пакни уз точак). Пронијева кочница је типичан представник механичких кочница која се користи за мерење снаге мотора. Проналазач по коме је и добила име је славни француски математичар Gaspard Clair Francois Marie Riche de Prony (1755-1839) који је руководио техничким пројектима за потребе Наполеонове војске.



Слика 5.

На слици 5 је шематски приказана једна од верзија Пронијеве кочнице. Момент силе трења између пакни и мотора, који се окреће константном угаоном брзином, се уравнотежава помоћу тегова масе m који се налазе на крају полуге дужине l.

Снага мотора се одређује према формули

$$P = mgl\omega \qquad (1)$$

где је P снага мотора [W] (јединица за мерење снаге је ват и једнака је $[\mathrm{W}] = \frac{[\mathrm{N}][\mathrm{m}]}{[\mathrm{s}]}$), m маса тегова (оптерећење), l дужина полуге, ω угаона брзина мотора.

Због своје мале осетљивости Пронијева кочница се углавном користи за мерење мотора већих снага као што су мотори аутомобила (израз "коњска снага" као мера за снагу мотора потиче од овог метода мерења снаге).

У једном индустријском постројењу помоћу Пронијеве кочнице је вршено испитивање понашања шест мотора, који се окрећу константном угаоном брзином, у условима радног оптерећења сваког мотора. Сваком од мотора је Пронијевом кочницом три пута измерена снага коју мотор развија под својим радним оптерећењем и у табели 1 су дате измерене вредности. Дужина полуге Пронијеве кочнице је $l = (1{,}200 \pm 0{,}002)$ m. За убрзање Земљине теже узети $g = 9{,}81\, m/s^2$ при чему се грешка може занемарити.

Табела 1.

m [kg]	6	7	8	9	10	11
P_1 [W]	14700	17450	19600	22050	24650	27100
P_2 [W]	14900	17150	20200	22150	24250	27000
P_3 [W]	14800	17750	19900	22250	24450	27200

а) Нацртати график зависности снаге мотора од оптерећења тј. функцију P=*f*(m)

б) Графичком методом одредити угаону брзину мотора и израчунати одговарајућу грешку

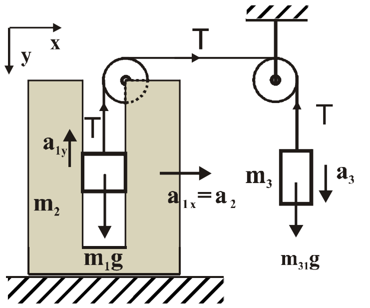
(20п)

Задатке припремили:
др Зоран Мијић, Институт за физику, Београд
Зоран Поповић, Физички факултет, Београд

Рецензент:
др Невена Пуач, Институт за физику, Београд

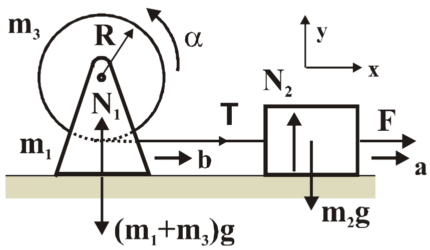
Председник Комисије за такмичење ученика средњих школа:
др Александар Крмпот, Институт за физику, Београд

P1. Претпостављени смерови кретања појединих тела, као и одговарајуће силе које делују у систему су приказани на слици 1. Једначина која описује кретање блока масе m_3 је $m_3a_3 = m_3g - T$ **(2п)** док за кретање система блокова m_1 и m_2 дуж x осе важи $(m_1 + m_2)a_2 = T$ **(2п)**. Пошто су блокови m_1 и m_2 према услову задатка у сталном међусобном контакту њихова убрзања дуж x осе су једнака тј. важи $a_{1x} = a_2$ **(1п)** док за кретање блока масе m_1 дуж y осе важи $m_1a_{1y} = T - m_1g$ **(2п)**. Из услова неистегљивости конца налази се веза између појединих убрзања $a_3 = a_{1y} + a_2$ **(2п)**. Из претходних једначина се за силу затезања конца налази $T = \frac{2m_1m_3(m_1+m_2)g}{(m_1+m_2)(m_1+m_3)+m_1m_3}$ **(3п)**, за хоризонталну компоненту убрзања блока масе m_1 $a_{1x} = a_2 = \frac{2m_1m_3g}{(m_1+m_2)(m_1+m_3)+m_1m_3}$ **(2п)**, а за вертикалну компоненту $a_{1y} = \frac{m_2(m_3-m_1)-m_1^2}{(m_1+m_2)(m_1+m_3)+m_1m_3}g$ **(3п)**. Тражени интензитет убрзања блока масе m_1се коначно добије из једначине $a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2}$ **(1п)** односно коначно $a_1 = \frac{\sqrt{(2m_1m_3)^2+[m_2(m_3-m_1)-m_1^2]^2}}{(m_1+m_2)(m_1+m_3)+m_1m_3}g$ **(2п)**.



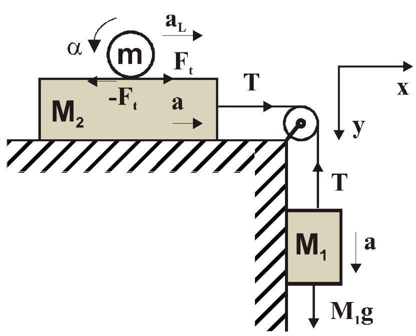
Слика 1.

P2. На слици 2 су приказане релевантне силе које делују у систему. Кретање блока дуж x осе је описано једначином $m_2a = F - \mathrm{T}$ **(2п)**, а кретање постоља и ваљка као целине $(m_1 + m_3)b = T$ **(3п)** где су a и b одговарајућа убрзања, а T сила затезања конца. Ротација ваљка око осовине је описана једначином $I\alpha = RT$ **(2п)** где је $I = m_3R^2/2$ момент инерције ваљка, а α угаоно убрзање ваљка. За убрзање блока важи $a = b + \alpha R$ **(3п)**. Из претходних једначина се за тражено убрзање блока у односу на подлогу налази $a = \frac{(2m_1+3m_3)F}{2m_1m_2+3m_2m_3+m_1m_3+m_3^2}$ **(4п)**, док је убрзање постоља са ваљком $b = \frac{m_3F}{2m_1m_2+3m_2m_3+m_1m_3+m_3^2}$ **(4п)**. Угаоно убрзање ваљка је $\alpha = \frac{2(m_1+m_3)F}{R(2m_1m_2+3m_2m_3+m_1m_3+m_3^2)}$ **(2п)**.



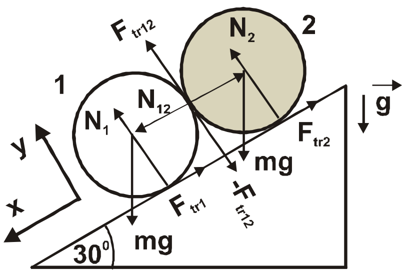
Слика 2.

P3. На слици 3 су приказане релевантне силе које делују у систему. Кретање блокова у односу на подлогу је описано једначинама $M_1a = M_1g - T$ **(2п)**, $M_2a = T - F_t$ **(2п)**, где је T сила затезања конца, а F_t сила трења котрљања. Транслаторно кретање лопте у односу на непокретну подлогу је описано једначином $ma_L = F_t$ **(2п)** док за котрљање лопте без клизања важи $I\alpha = F_tR$ **(2п)** при чему је убрзање лопте $a_L = a - \alpha R$ **(4п)** (α је угаоно убрзање лопте, R полупречник лопте, I момент инерције лопте). Из претходних једначина се за тражено убрзање блокова налази $a = M_1g/(M_1 + M_2 + 2m/7)$ **(4п)** док је убрзање лопте у односу на подлогу $a_L = 2M_1g/7(M_1 + M_2 + 2m/7)$ **(4п)**.



Слика 3.

P4. Компоненте гравитационе силе кугле (цилиндра) у правцу кретања и нормално на косу раван су $mg/2$ и $mg\sqrt{3}/2$. За транслаторно кретање цилиндра важи једначина: $X: mg\frac{1}{2} + N_{12} - Ftr_1 = ma$ **(2п)**. За ротацију цилиндра важи $(Ftr_1 - Ftr_{12})r = I_1\alpha$ **(2п)** где је $I_1 = mr^2/2$ момент инерције цилиндра, α угаоно убрзање, r радијус цилиндра и кугле, Ftr_1 сила трења котрљања између ваљка и подлоге, а $Ftr_{12} = N_{12}\mu$ **(2п)** сила трења између ваљка и кугле. Сила реакције између тела је $N_{12} = N_{21}$. Убрзања тела током кретања су иста $a_1 = a_2 = a$ **(2п)**. Силе реакције подлоге на цилиндар и куглу су редом N_1 и N_2. Динамика транслације кугле описана је једначином: $X: mg\frac{1}{2} - N_{21} - Ftr_2 = ma$ **(2п)**. За ротацију кугле важи једначина $(Ftr_2 - Ftr_{12})r = I_2\alpha$ **(2п)**, где је $I_2 = 2mr^2/5$ момент инерције кугле, F_{tr2} сила трења котрљања између кугле и стрме равни. За оба тела важи да је угаоно убрзање $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{a}{r}$ **(2п)**. Комбинацијом претходних једначина добија се систем: $\frac{1}{2}mg + N_{12}(1-\mu) = ma + I_1\frac{a}{r^2}$ **(1п)** $\frac{1}{2}mg - N_{12}(1+\mu) = ma + I_2\frac{a}{r^2}$ **(1п)**. Коначно се убрзање система тела добија решењем овог система једначина $a = \frac{10g}{29+\mu}$ **(4п)**.



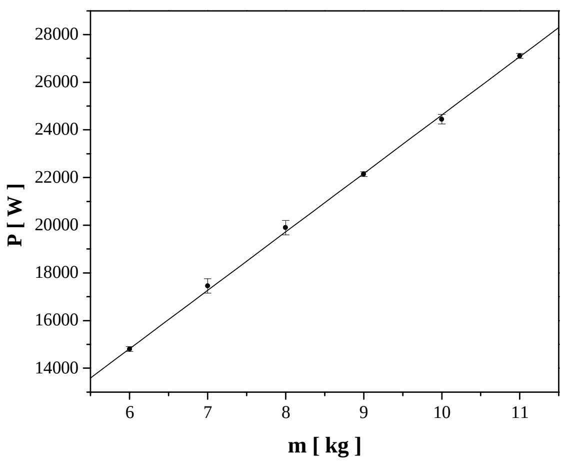
Слика 4.

P5. У табели 1 су приказане средње вредности измерених снага за сваки мотор, као и одговарајућа апсолутна грешка **(2п)**. Једанчина $P = g\omega lm$ за неку одређену вредност угаоне брзине мотора, одређује линеарну зависност снаге мотора од оптерећења m где је коефицијент правца праве $P=f(m)$ једнак $k = g\omega l$ **(1п)**.

Табела 1.

m [kg]	6	7	8	9	10	11
P_1 [W]	14700	17450	19600	22050	24650	27100
P_2 [W]	14900	17150	20200	22150	24250	27000
P_3 [W]	14800	17750	19900	22250	24450	27200
Ps [W]	(14800) **14800**	(17450) **17400**	(19900) **19900**	(22150) **22200**	(24450) **24400**	(27100) **27100**
ΔPs [W]	100	300	300	100	200	100

На слици 5 је приказана одговарајућа зависност (коректно нацртан график вреди **5п**). Графичком методом се избором две неекспериментaлне тачке које припадају правој $P=f(m)$ нпр. тачке A са координатама A (6,3 kg 15500 W) и тачке B са координатама B (10,8 kg 26500 W) одређује коефицијент правца као $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow k = 2444{,}44\ \mathrm{W/kg}$ **(3п)**. Вредност угаоне брзине се добија из $\omega = \frac{k}{\lg} = 207{,}64\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ **(2п)**. Релативна грешка за коефицијент правца се рачуна из $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} \approx 0{,}063$ **(2п)** па се за грешку угаоне брзине добија $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta l}{l} \approx 0{,}065$**(2п)** односно $\Delta\omega \approx 13{,}4\ rad/s$**(1п)**. Коначно се за угаону брзину налази $\omega = (210 \pm 20)\frac{rad}{s}$**(2п)**.



Слика 5. Одређивање брзине обртања мотора